

## НЕСТАЦИОНАРНАЯ ЛАМИНАРНАЯ КОНВЕКЦИЯ НА ИЗЛУЧАЮЩЕЙ ПЛАСТИНЕ

В. В. САЛОМАТОВ, Е. М. ПУЗЫРЕВ

(Представлена кафедрой теплофизики и атомной энергетики)

Исследуется влияние теплового излучения на ламинарный пограничный слой непоглощающей жидкости, обтекающей теплоизлучающую пластину в условиях естественной или вынужденной конвекции.

Вопросы нестационарной конвекции и, в частности, взаимодействия теплового излучения с нестационарным ламинарным пограничным слоем непоглощающей жидкости представляют значительный интерес. Задачи такого рода возникают при работе теплообменных устройств в переменных режимах, различных элементов электронных приборов при их форсированном пуске, при обтекании теплоотдающих поверхностей в условиях существенной нестационарности и т. д.

Из исследований, которые касаются частных вопросов данной проблемы, следует отметить статьи [1—3]. В работе [1] решена задача нестационарной вынужденной ламинарной конвекции при граничном условии первого рода. Показано, что при ступенчатом скачке скорости и температуры переход из неустановившегося режима в стационарный происходит при переходе через фронт тепловой и динамической волн, движущихся от передней кромки пластины. На такой же характер процесса в случае естественной конвекции указывают экспериментальные исследования Гебхарта [3]. В статье [2] рассматривается задача взаимодействия теплового излучения с ламинарным пограничным слоем непоглощающей жидкости в условиях вынужденной и естественной стационарной конвекции.

Показано, что для постоянного граничного условия второго рода по длине пластины имеет место переход от теплообмена при граничном условии второго рода к теплообмену с граничным условием первого рода и получены аналитические решения, но лишь для предельных случаев: малых и больших значений параметра излучения  $\zeta$ .

В настоящей работе рассматривается более общая задача взаимодействия теплового излучения с ламинарным пограничным слоем непоглощающей жидкости для нестационарной естественной и вынужденной конвекции.

Естественная конвекция. Рассматривается нестационарная ламинарная естественная конвекция непоглощающей жидкости с постоянными теплофизическими свойствами, возникающая около вертикальной пластины при ступенчатом подводе к ее поверхности постоянного теплового потока  $q_w$ . Теплопередача осуществляется при взаимодействии лучистого теплообмена (к окружающей среде температуры —  $T_e$ ) и конвекции (к омывающей жидкости с температурой —  $T_\infty$ ).

Математически задача описывается уравнениями сохранения массы, импульса и энергии:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g\beta(T - T_\infty), \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (3)$$

с граничными условиями в предположении равенства толщин теплового и гидродинамического пограничных слоев:

для  $\tau \leq 0$

$$u = 0, T = T_\infty, \quad (4)$$

для  $\tau > 0$

$$\text{при } y = 0 \quad \frac{\partial T}{\partial y} = -\frac{q_k}{\lambda} = -\frac{q_w - \sigma \varepsilon (T_w^4 - T_e^4)}{\lambda}, \quad (5)$$

$$u = v = 0, \quad (6)$$

при  $y = \delta$

$$T = T_\infty, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad (7)$$

$$u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \quad (8)$$

Граничным условием (5), (7) удовлетворяет профиль температуры,

$$T - T_\infty = \frac{q_k \delta}{2\lambda} \left( \frac{y^2}{\delta^2} - 2 \frac{y}{\delta} + 1 \right), \quad (9)$$

дающий при  $y = 0$  соотношение

$$\delta = \frac{2\lambda(T_w - T_\infty)}{q_k} = \frac{2\lambda(\Theta_w - 1)}{\sigma \varepsilon T_\infty^3 (\Theta_w^4 - \Theta_e^4)}. \quad (10)$$

Представив уравнение (2) в виде

$$\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g\beta(T - T_\infty) = C_1 \quad (11)$$

и интегрируя его с учетом (9), после определения констант из граничных условий (6), (8) получим профиль скорости:

$$u = \frac{g\beta q_k \delta^3}{6\lambda\nu} \left( -\frac{y^4}{4\delta^4} + \frac{y^3}{\delta^3} - \frac{5}{4} \cdot \frac{y^2}{\delta^2} + \frac{y}{2\delta} \right). \quad (12)$$

Интегрируя (3) от  $y=0$  до  $y=\delta$  с привлечением (1), (6), (8), получим уравнение теплового потока

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^\delta (T - T_\infty) dy + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta u(T - T_\infty) dy = -a \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0}, \quad (13)$$

из которого следует

$$\frac{\partial}{\partial \tau} q_k \delta^2 + \frac{g\beta}{140\lambda\nu} \frac{\partial}{\partial x} q_k^2 \delta^5 = 6aq_k. \quad (14)$$

Используя (10), запишем характеристическую систему полученного уравнения [6].

$$\frac{2(\Theta_w - 1)d\Theta_w}{(\Theta_l^4 - \Theta_w^4)^2} + \frac{(\Theta_w - 1)^2 d\Theta_w^4}{(\Theta_l^4 - \Theta_w^4)^3} = 6a \left( \frac{\sigma \varepsilon T_\infty^3}{2\lambda} \right)^2 d\tau, \quad (15)$$

$$\frac{5(\Theta_w - 1)^4 d\Theta_w}{(\Theta_l^4 - \Theta_w^4)^4} + \frac{3(\Theta_w - 1)^5 d\Theta_w^4}{(\Theta_l^4 - \Theta_w^4)^5} = \frac{420\nu a}{g\beta T_\infty} \left( \frac{\sigma \varepsilon T_\infty^3}{2\lambda} \right)^4 dx, \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \frac{5(\Theta_l^4 - \Theta_w^4) + 12(\Theta_w - 1)\Theta_w^3}{2(\Theta_l^4 - \Theta_w^4) + 4(\Theta_w - 1)\Theta_w^3} \cdot \frac{(\Theta_w - 1)^3}{(\Theta_l^4 - \Theta_w^4)^2} d\tau = \\ = \frac{70\nu dx}{g\beta T_\infty} \left( \frac{\sigma \varepsilon T_\infty^3}{2\lambda} \right)^2. \end{aligned} \quad (17)$$

Интеграл дифференциального уравнения (15) при граничном условии  $\Theta_w(\tau=0) = 1$  дает трансцендентное уравнение для расчета изменения температуры поверхности пластины при нестационарном теплообмене

$$\frac{(\Theta_w - 1)^2}{2(\Theta_l^4 - \Theta_w^4)^2} + F(\Theta_l; \Theta_w) - F(\Theta_l; 1) = 6a \left( \frac{\sigma \varepsilon T_\infty^3}{2\lambda} \right)^2 \tau. \quad (18)$$

и конвективной теплоотдачи

$$\begin{aligned} \text{Nu}_\tau &= \frac{q_k x_*}{(T_w - T_\infty)\lambda} = \frac{2x_*}{\delta} = \\ &= \sqrt[3]{3F_0 - \frac{1}{2} \left( \frac{2\lambda}{\sigma \varepsilon \cdot T_\infty^3 \cdot x_*} \right)^2 \left[ F(\Theta_l, \Theta_w) - F(\Theta_l, 1) \right]}, \end{aligned} \quad (19)$$

где

$$F(\Theta_l, \Theta_w) = \int \frac{(\Theta_w - 1)d\Theta_w}{(\Theta_l^4 - \Theta_w^4)^2} = \frac{\Theta_w(\Theta_w - 1)}{4\Theta_l^4(\Theta_l^4 - \Theta_w^4)} +$$

$$+\frac{1}{8\Theta_l^6} \ln \left| \frac{\Theta_l^2 + \Theta_w^2}{\Theta_l^2 - \Theta_w^2} \right| - \frac{3}{16\Theta_l^7} \left[ \ln \left| \frac{\Theta_l + \Theta_w}{\Theta_l - \Theta_w} \right| + 2 \operatorname{arctg} \frac{\Theta_w}{\Theta_l} \right], \quad (20)$$

$x_*$  — некоторый фиктивный линейный размер, служащий только для записи критериальной зависимости (19).

Интегрируя дифференциальное уравнение (16) при граничном условии на передней кромке пластины  $\Theta_w(x=0)=1$ , получим стационарное решение в виде трансцендентного уравнения для расчета изменения температуры по длине пластины

$$\frac{3}{5} \frac{(\Theta_w - 1)^5}{(\Theta_l^4 - \Theta_w^4)^4} + G(\Theta_l; \Theta_w) - G(\Theta_l; 1) = \frac{336a\gamma x}{g\beta T_\infty} \left( \frac{\sigma \varepsilon T_\infty^3}{2\lambda} \right)^4, \quad (21)$$

а следовательно, и конвективной теплоотдачи

$$\begin{aligned} \text{Nu}_x &= \frac{q_k x}{(T_w - T_\infty)\lambda} = \\ &= \frac{1}{\sqrt[4]{\frac{35}{\text{Gr}_x \text{Pr}} - \frac{5}{3(\Theta_w - 1)} \left( \frac{\lambda}{\sigma \varepsilon T_\infty^3 x} \right)^4 [G(\Theta_l; \Theta_w) + G(\Theta_l; 1)]}}, \end{aligned} \quad (22)$$

где

$$\begin{aligned} G(\Theta_l, \Theta_w) &= \int \frac{(\Theta_l - 1)^4 d\Theta_w}{(\Theta_l^4 - \Theta_w^4)^4} = \frac{\Theta_w(\Theta_w - 1)^4}{12\Theta_l^4(\Theta_l^4 - \Theta_w^4)^3} + \\ &+ \frac{1}{384\Theta_l^{12}(\Theta_l^4 - \Theta_w^4)^2} (21\Theta_l^8\Theta_w + 7\Theta_l^4\Theta_w^5 - 128\Theta_l^8 + 486\Theta_l^4\Theta_w^3 - 270\Theta_w^7 - 400\Theta_l^4\Theta_w^2 + \\ &+ 240\Theta_w^6 + 121\Theta_l^4\Theta_w - 770\Theta_w^5) + \\ &+ \frac{(-7\Theta_l^4 + 270\Theta_l^2 + 77)}{512\Theta_l^{15}} \ln \left| \frac{\Theta_l + \Theta_w}{\Theta_l - \Theta_w} \right| = \frac{5}{16\Theta_l^{24}} \ln \left| \frac{\Theta_l^2 + \Theta_w^2}{\Theta_l^2 - \Theta_w^2} \right| + \\ &+ \frac{(-7\Theta_l^4 - 270\Theta_l^2 + 77)}{256\Theta_l^{15}} \operatorname{arctg} \frac{\Theta_w}{\Theta_l}. \end{aligned} \quad (23)$$

Для анализа полученных решений определим по правилу Лопиталья относительный вклад членов  $[F(\Theta_l; \Theta_w) - F(\Theta_l; 1)]$  и  $[G(\Theta_l; \Theta_w) - G(\Theta_l; 1)]$  в уравнениях (18), (21) для предельных случаев: малой ( $\tau$  или  $x \rightarrow 0$ ;  $\Theta_w \rightarrow 1$ ) и большой ( $\tau$  или  $x$ -велико:  $\Theta_w \rightarrow \Theta_l$ , так как  $q_k \rightarrow 0$  толщины пограничного слоя:

$$\lim_{\Theta_w \rightarrow 1} \int_1^{\Theta_w} \frac{(\Theta_w - 1) d\Theta_w}{(\Theta_l^4 - \Theta_w^4)^2} = \begin{cases} 1 & (\Theta_w \rightarrow 1) \\ 0 & (\Theta_w \rightarrow \Theta_l), \end{cases} \quad (24)$$

$$\lim_{\Theta_w \rightarrow \Theta_l} \int_1^{\Theta_w} \frac{(\Theta_w - 1)^4 d\Theta_w}{(\Theta_l^4 - \Theta_w^4)^4} = \begin{cases} \frac{1}{3} & (\Theta_w \rightarrow 1) \\ 0 & (\Theta_w \rightarrow \Theta_l) \end{cases} \quad (25)$$

Соотношение (24) позволяет представить уравнение (19) в виде

$$Nu_{\tau} = \sqrt{\frac{2}{3F_0}}, \quad (\delta(\tau) = \sqrt{6a\tau}) - \Theta \rightarrow 1 \quad (\tau \rightarrow 0) \quad (19 \text{ а})$$

$$\text{и } Nu_{\tau} = \frac{1}{\sqrt{3F_0}}, \quad (\delta(\tau) = \sqrt{12a\tau}) - \Theta_w \rightarrow \Theta_{\text{л}} \quad (\tau \text{ — велико}), \quad (19 \text{ б})$$

т. е. уравнение (19), описывающее процесс нестационарной конвекции, совпадает в предельных случаях с точностью до 7% с уравнением нестационарной теплопроводности в полуограниченном теле с граничным условием (5). Тепловое излучение вызывает переход от теплообмена при

граничном условии второго рода ( $Bi = \frac{1}{2\text{ierfc}(0)} F_0^{-1/2}$ ) к теплообмену с

граничным условием первого рода ( $Bi = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot F_0^{-1/2}$ ) [4].

Аналогично с учетом (25) представим (23) в виде:

$$Nu_x = 0,442(Gr_x \cdot Pr)^{1/4} \quad \Theta_w \rightarrow 1 \quad (x \rightarrow 0) \quad (22 \text{ а})$$

$$\text{и } Nu_x = 0,409(Gr_x \cdot Pr)^{1/4} \quad \Theta_w \rightarrow \Theta_{\text{л}} \quad (x \text{ — велико}), \quad (22 \text{ б})$$

таким образом, уравнение (22) описывает переход от теплообмена при граничном условии второго рода (22а) к теплообмену с граничным условием первого рода (22б), вызываемый наличием теплового излучения. Отличие предельных решений от точных значений не более 4% [2].

Решение уравнения (17), описывающего движение фронта тепловой волны (граница перехода от нестационарного решения к стационарному), можно найти лишь для предельных случаев, так как уравнения (18) и (21) не дают явных зависимостей  $\Theta_w(\tau)$  или  $\Theta_w(x)$ :

$$x_{\tau} = \frac{0,105 g \beta q_k \sqrt{a}}{\lambda \cdot Pr} \cdot \tau^{5/2} \quad \Theta_w \rightarrow 1 \quad (17 \text{ а})$$

$$\text{и } x_{\tau} = \frac{0,257 g \beta (T_w - T_{\infty})}{Pr} \cdot \tau^2 \quad \Theta_w \rightarrow \Theta_{\text{л}}. \quad (17 \text{ б})$$

Критериальный вид (17а) совпадает с экспериментальными данными [3] (фиг. 2.).

Вынужденная конвекция. Рассматривается нестационарное обтекание пластины ламинарным потоком непоглощающей жидкости с постоянными теплофизическими свойствами, возникающее при ступенчатом скачке скорости. Одновременно на поверхности пластины задается ступенчатый скачок теплового потока —  $q_w$ , который передается при взаимодействии лучистого теплообмена (к окружающей среде температуры  $T_e$ ) и конвекции (к набегающему потоку с температурой  $T$ ). Сжимаемость и вязкая диссипация не учитываются.

Математическая постановка данной задачи совпадает с предыдущей, за исключением соотношений (2), (8), которые принимают вид:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (2')$$

$$\tau > 0, y = \delta_g, u = U_\infty, \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad (8')$$

а также учитывается отличие в толщинах теплового и гидродинамического пограничных слоев.

Граничным условием (6), (8') удовлетворяет полином

$$u = U_\infty \frac{y}{\delta_g} \left( 2 - \frac{y}{\delta_g} \right). \quad (26)$$

дающий после его подстановки в интегральное соотношение Кармана дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial \delta_g}{\partial \tau} + U_\infty \frac{2}{5} \frac{\partial \delta_g}{\partial x} = \frac{6\nu}{\delta_g}. \quad (27)$$

Характеристическая система данного уравнения [6]

$$d\tau = \frac{dx}{\frac{2}{5}U_\infty} = \frac{\delta_g d\delta_g}{6\nu} \quad (28)$$

позволяет получить нестационарные и стационарные решения, а также уравнение движения динамической волны соответственно:

$$\delta_g(\tau) = \sqrt{12\nu\tau}, \delta_g(x) = \sqrt{\frac{30\nu x}{U_\infty}}, x_n = 0.4U_\infty\tau. \quad (29)$$

Производя интегрирование в уравнении теплового потока (13) от  $y=0$  до  $y=\delta_m$  с учетом (9) и (26), получим дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} q_k \delta_m^2 + U_\infty \frac{\partial}{\partial x} q_k \delta_m^2 H(\Delta) = 6aq_k, \quad (30)$$

где

$$H(\Delta) = \frac{\Delta}{2} - \frac{\Delta^2}{10} \quad \text{при } \Delta = \frac{\delta_m}{\delta_g} < 1,$$

$$H(\Delta) = 1 - \frac{1}{\Delta} + \frac{1}{2\Delta^2} - \frac{1}{10\Delta^3} \quad \text{при } \Delta > 1.$$

Уравнение (30) имеет четыре решения в зависимости от рассматриваемой зоны.

Стационарная зона I имеет место после прохождения тепловой и динамической волн —  $\delta_g(x)$ ,  $\delta_m(x)$ ,

$$U_\infty \frac{\partial}{\partial x} q_k \delta_m^2 H(\Delta) = 6aq_k. \quad (30-1)$$

Уравнение (30-1) как и (16) описывает переход по длине пластины от теплообмена при граничном условии второго рода к теплообмену с граничным условием первого рода. В общем случае уравнение (30-1) можно решить только численно. Для построения его приближенного решения заменим отношение  $\Delta = \frac{\delta_m}{\delta_g}$ , равное  $\text{Pr}^{-\frac{1}{3}}$  при  $T_w = \text{const}$  [5] и

0,78  $\text{Pr}^{-\frac{1}{3}}$  при  $q_k = \text{const}$ , (решение (30—1) для  $q = \text{const}$ , средним значением  $-\Delta = 0,89 \text{Pr}^{-\frac{1}{3}}$  и учетом (10) приведем (30—1) к виду, аналогичному (16):

$$\frac{2(\Theta_w - 1)d\Theta_w}{(\Theta_l^4 - \Theta_w^4)^2} + \frac{(\Theta_w - 1)^2 d\Theta_w^4}{(\Theta_l^4 - \Theta_w^4)^3} = \left( \frac{\sigma \varepsilon T_\infty^3}{2\lambda} \right)^2 \frac{6adx}{U_\infty H(0,89\text{Pr}^{-\frac{1}{3}})}. \quad (31)$$

Интегрируя полученное уравнение при граничном условии  $\Theta_w(x=0) = 1$ , получим соотношения для расчета изменения температуры и конвективной теплоотдачи по длине пластины:

$$\frac{1}{2} \frac{(\Theta_w - 1)^2}{(\Theta_l^4 - \Theta_w^4)^2} + F(\Theta_l; \Theta_w) - F(\Theta_l; 1) = \left( \frac{\sigma \varepsilon T_w^3}{2\lambda} \right)^2 \frac{6ax}{U_\infty H(0,89\text{Pr}^{-\frac{1}{3}})}, \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \text{Nu}_x &= \frac{q_k x}{\lambda(T_w - T_\infty)} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{H(0,89\text{Pr}^{-\frac{1}{3}})\text{Re}_x \text{Pr}} - \frac{1}{2} \left( \frac{2\lambda}{\sigma \varepsilon T_\infty^3 x} \right)^2 [F(\Theta_l; \Theta_w) - F(\Theta_l; 1)]}}, \end{aligned} \quad (33)$$

Предельные решения (33) на 5% отличаются от точных значений [2]:

$$\text{Nu}_x = \sqrt{H(0,89\text{Pr}^{-\frac{1}{3}}) \frac{2}{3} \text{Re}_x \cdot \text{Pr}}, \quad \text{Nu}_x = 0,43 \text{Re}_x^{\frac{1}{2}} (\text{Pr} = 0,7), \quad (33 \text{ а})$$

$$\text{Nu}_x = \sqrt{H(0,89\text{Pr}^{-\frac{1}{3}}) \frac{1}{3} \text{Re}_x \text{Pr}}, \quad \text{Nu}_x = 0,304 \text{Re}_x^{\frac{1}{2}} (\text{Pr} = 0,7). \quad (33 \text{ б})$$

Нестационарная зона II находится перед фронтами тепловой и динамической волн —  $\delta_g(\tau)$ ,  $\delta_m(\tau)$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} q_k \delta_m^2 = 6aq_k. \quad (30\text{—II})$$

Уравнение (30—II) совпадает с уравнением (15) и имеет решения (18), (19).

Используя полученные решения, можно определить распространение фронта тепловой волны при совпадении его с фронтом динамической волны для предельных случаев из равенства  $\delta_m(\tau) = \delta_m(x_\tau)$ : вблизи передней кромки пластины при малых  $\tau$  (граничное условие второго рода) —  $x_\tau = 0,33 U_\infty \text{Pr}^{-\frac{1}{3}}$ , для больших  $x$  и  $\tau$  (граничное условие первого рода) —  $x_\tau = 0,4 U_\infty \text{Pr}^{-\frac{1}{3}}$ .

Таким образом, скорость распространения тепловой волны растет по мере ее движения от  $0,33 \text{Pr}^{-\frac{1}{3}}$  до  $0,4 \text{Pr}^{-\frac{1}{3}}$ , т. е. при  $\text{Pr} > 1$  —  $x_\tau < x_n$  при  $\text{Pr} < 0,56$  —  $x_\tau > x_n$  и при  $1 > \text{Pr} > 0,56$ , — тепловая волна постепенно догоняет и обгоняет динамическую.

Решение для переходной зоны III, находящейся между динамической и следующей за ней тепловой волнами ( $\Delta < 1$ ), можно найти лишь в

предельных случаях:  $q_k = \text{const}$ , или  $T_w = \text{const}$ . Пренебрегая с целью упрощения членом  $\frac{\Delta^2}{10}$  и вводя новую переменную  $\xi = U_\infty \tau / x$  с учетом

$\delta_g(x) = \sqrt{\frac{30\nu x}{U_\infty}}$ , получим дифференциальные уравнения

$$\Delta \cdot \Delta^1 \xi \left(2 - \frac{3}{2} \Delta \xi\right) = \frac{1}{5\text{Pr}} \quad q_k = \text{const}, \quad (34 \text{ а})$$

$$\Delta \cdot \Delta^1 \xi (1 - \Delta \cdot \xi) = \frac{1}{5\text{Pr}} \quad T_w = \text{const}, \quad (34 \text{ б})$$

которые имеют решения

$$\xi = 10\text{Pr} \exp(-2,5\Delta^3\text{Pr}) \int_0^\Delta \exp(2,5\Delta^3\text{Pr}) \Delta d\Delta, \quad q_k = \text{const} \quad (35 \text{ а})$$

$$\xi = 5\text{Pr} \exp(-1,67\Delta^3\text{Pr}) \int_0^\Delta \exp(1,67\Delta^3\text{Pr}) \Delta d\Delta, \quad T_w = \text{const}. \quad (35 \text{ б})$$

Для вычислений при малых  $\Delta$  можно использовать разложение (35) в ряд Маклорена.

Решение для зоны IV, находящейся между тепловой и следующей за ней динамической волнами  $\Delta > 1$ , определим из характеристической системы уравнения (30), которая имеет вид (так как  $\delta_g = \sqrt{12a\tau}$ ):

$$\frac{d\tau}{\frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{(\Theta_w - 1)^2}{(\Theta_l^4 - \Theta_w^4)} \right] d\tau} = \frac{dx}{U_\infty \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{(\Theta_w - 1)^2}{(\Theta_l^4 - \Theta_w^4)} H(\Delta) \right] dx} = \left( \frac{2\lambda}{\sigma \varepsilon T_\infty^3} \right)^2 \frac{1}{6a(\Theta_l^4 - \Theta_w^4)}. \quad (36)$$

Пренебрегая с целью упрощения в  $H(\Delta)$  членом  $\frac{1}{10\Delta^3}$ , запишем дифференциальное уравнение для зоны IV:

$$\frac{2(\Theta_w - 1) d\Theta_w}{(\Theta_l^4 - \Theta_w^4)^2} + \frac{(\Theta_w - 1) d\Theta_w^4}{(\Theta_l^4 - \Theta_w^4)^3} - \delta_g \frac{\sigma \varepsilon T_\infty^3}{2\lambda} \frac{d\Theta_w}{\Theta_l^4 - \Theta_w^4} - \frac{\delta_q^2}{2} \left( \frac{\sigma \varepsilon T_\infty^3}{2\lambda} \right)^2 \frac{d\Theta_w^4}{\Theta_l^4 - \Theta_w^4} = \frac{6a}{U_\infty} \left( \frac{\sigma \varepsilon T_\infty^3}{2\lambda} \right)^2 dx, \quad (37)$$

которое после интегрирования при граничном условии в точке обгона  $\Theta_w = (x = x_\tau = x_n) = \Theta_0$  дает трансцендентное уравнение для расчета температуры поверхности пластины:

$$\frac{1}{2} \frac{(\Theta_w - 1)^2}{(\Theta_l^4 - \Theta_w^4)^2} + F(\Theta_l; \Theta_w) - F(\Theta_l; \Theta_0) - \frac{\sigma \varepsilon T_\infty^3}{2\lambda} \frac{\delta_g}{4\Theta_0^3} \left[ \ln \left| \frac{\Theta_l + \Theta_w}{\Theta_l - \Theta_w} \right| - \ln \left| \frac{\Theta_l + \Theta_0}{\Theta_l - \Theta_0} \right| + 2\text{arctg} \frac{\Theta_w}{\Theta_l} - 2\text{arctg} \frac{\Theta_0}{\Theta_l} \right] + \frac{\delta_q^2}{2} \left( \frac{\sigma \varepsilon T_\infty^3}{2\lambda} \right)^2 [\ln |\Theta_l^4 - \Theta_w^4| - \ln |\Theta_l^4 - \Theta_0^4|] = \frac{6ax}{U_\infty} \left( \frac{\sigma \varepsilon T_\infty^3}{2\lambda} \right)^2. \quad (38)$$

В заключение отметим, что решения для переходных зон (35) и (38) около фронта первой волны переходят в нестационарные (18), (19), а вблизи фронта отстающей волны—в стационарные (32), (33), [1].

#### ОБОЗНАЧЕНИЯ

$T_w, T_e, T_\infty$  — абсолютные температуры стенки, окружающей среды и омывающей жидкости соответственно;  $\Theta_w = \frac{T_w}{T_\infty}$  — безразмерная температура

стенки;  $\Theta_n = \sqrt[4]{\frac{q_w + \sigma \varepsilon T_e^4}{\sigma \varepsilon T_\infty^4}}$  — безразмерная температура стенки в

случае теплообмена только излучением;  $\delta, \delta_T, \delta_w$  — толщина пограничного слоя тоже гидродинамического и теплового;  $q_w, q_k$  — тепловые потоки — на стенке и конвективный соответственно;  $x_T, x_H$  — координаты фронта тепловой и динамической волн;  $\beta = \frac{1}{T_\infty}$  — коэффициент теплового расширения;

$Gr_x = \frac{g\beta(T_w - T_\infty)x^3}{\nu_2}$  критерий Грасгофа;  $\sigma$  — постоянная Стефана-Больцмана.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. Л. Розеншток. Сб. Тепло- и массоперенос, 1. Конвективный теплообмен в однородной среде. «Наука и техника», Минск, 1965, стр. 277.
2. Р. Д. Сесс. Сб. Проблемы теплообмена. «Атомиздат», М., 1967, стр. 7.
3. Г. Гебхарт. Теплопередача 89, серия С., № 3, 1967.
4. А. В. Лыков. Теория теплопроводности. «Высшая школа», М., 1967.
5. Г. Шлихтинг. Теория пограничного слоя. ИЛ., 1956.
6. Э. Камке. Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого ряда. «Наука», М., 1966.