ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 119 1963 г.

О НЕСИММЕТРИЧНОМ ПРОГРЕВЕ ПЛОСКОЙ СТЕНКИ

Ю. В. ВИДИН, Г. Н. БОЙКОВ

(Представлено профессором, доктором Г. И. Фуксом)

Если считать, что теплофизические характеристики вещества не меняются в процессе нагрева (охлаждения) твердого тела и если сам процесс идет под действием конвективного теплообмена, подчиняющегося закону Ньютона, то система дифференциальных уравнений, описывающая процесс, может быть представлена так:

$$\frac{\partial t(x, \tau)}{\partial \tau} = a \cdot \frac{\partial^2 t(x, \tau)}{\partial x^2}, \tag{1}$$

$$\lambda \cdot \frac{\partial t(+R, \tau)}{\partial x} = \alpha_1 \cdot [t_{c1} - t(+R, \tau)], \tag{2}$$

$$-\lambda \cdot \frac{\partial t(-R, \tau)}{\partial x} = \alpha_2 \cdot [t_{c2} - t(-R, \tau)], \tag{3}$$

$$t(x, 0) = t_0, \tag{4}$$

где

t_{c1}; α_1 — температура и коэффициент теплоотдачи первой среды;
t_{c2}; α_2 — температура и коэффициент теплоотдачи второй среды;
$2R$ — толщина стенки (начало координат в центре пластины).

Решение такой системы представляет определенные трудности, так как в данном случае решение дифференциального уравнения приходится согласовывать с граничными условиями с двух сторон. В литературе встречаются решения подобной несимметричной задачи, однако они имеют весьма сложный и громоздкий окончательный результат, практическое применение которого связано с большими трудностями [1, 2, 5].

По нашему мнению, в ряде случаев целесообразно к исследованию данного вопроса подойти с несколько иных позиций, а именно, исходя из физических и количественных представлений о процессе несимметричного прогрева.

Задача о нагревании (охлаждении) при несимметричных граничных условиях может быть с известной точностью решена на основании имеющихся решений симметричных задач с принятием во внимание физической картины процесса и некоторых количественных соотношений. Исходя из сказанного, предлагается вести расчет температурного поля, описываемого системой уравнений (1), (2), (3) и (4), на основе выражения

$$t(x,\tau)=0{,}5\cdot[t_{\text{сим.I}}(x,\tau)+t_{\text{сим.II}}(x,\tau)]+$$

$$+\kappa\cdot(x+l)\cdot\left[1-\sum_{1}^{\infty}A_{n}^{0}\cdot\cos\mu_{n}^{0}\cdot e^{-(\mu_{n}^{0})^{2}\cdot Fo}\right], \quad (5)$$

где $t_{\text{сим.I}}(x,\tau)$ — решение симметричной задачи при температуре среды t_{c1} и коэффициенте теплоотдачи α_1.

$t_{\text{сим.II}}(x,\tau)$ — аналогично для второй среды (t_{c2}; α_2);

κ — постоянный коэффициент, равный: $\kappa=\dfrac{t_{c1}-t_{c2}}{2\cdot R}\cdot$

$$\cdot\frac{2\,Bi_1\cdot Bi_2}{2\,Bi_1\cdot Bi_2+Bi_1+Bi_2}.$$

Значения постоянных A_n^0 и корней μ_n^0 определяются по среднеарифметическому значению критерия Био $\left(Bi_0=\dfrac{Bi_1+Bi_2}{2}\right)$ [3]. Величина l определяется по зависимости: $l=R\cdot\dfrac{Bi_1-Bi_2}{2\,Bi_1\cdot Bi_2}$.

Первое слагаемое $0{,}5\cdot[t_{\text{сим.I}}(x,\tau)+t_{\text{сим.II}}(x,\tau)]$ (главный член выражения) дает температурное поле в пластине при осредненных граничных условиях. Поэтому естественно ожидать, что результаты подсчета этой полусуммы окажутся достаточно точными для центральных слоев бесконечной плоской стенки на протяжении всего периода прогрева. Вполне понятно, что температуры на поверхностях в действительности будут отличаться от тех, которые получаются из главного члена выражения. Эти отклонения и учитывает второе слагаемое (вспомогательный член выражения).

Форма (структура) вспомогательного члена была принята исходя из следующих соображений:

1. Должны быть точно соблюдены начальные условия (4).

2. Должны быть строго выдержаны конечные условия процесса (распределение температуры в системе при $\tau=\infty$).

На основании этих условий величина константы κ определялась как градиент температуры при стационарных условиях, к которым в конце концов приходит система.

Предлагаемая зависимость (5) обладает следующими особенностями.

При одинаковых значениях коэффициентов теплоотдачи ($Bi_1=Bi_2$)

1) удовлетворяет дифференциальному уравнению (1) с точностью до 10 % при $Bi_1=Bi_2=\infty$ и $p=\dfrac{t_{c2}-t_0}{t_{c1}-t_0}=0{,}7$; при уменьшении значений критериев Био и увеличении значения комплекса p несоответствие зависимости (5) и дифференциального уравнения (1) уменьшается и стремится к нулю;

2) удовлетворяет граничным условиям (2) и (3) с точностью до 10 % при $Bi_1=Bi_2=0{,}01$ и $p=0{,}7$; при увеличении значений критериев Био и увеличении значения комплекса p несоответствие зависимости (5) и граничных условий уменьшается и стремится к нулю.

При различных значениях коэффициентов теплоотдачи ($Bi_1\neq Bi_2$) соотношение (5) удовлетворяет граничным условиям (2) и (3) с точностью до 10 % при разнице значений Bi_1 и Bi_2 в $2\div3$ раза и $p=0{,}7$. При уменьшении разницы критериев Био совпадение улучшается и расхождение стремится к нулю. При тех же условиях выражение (5) с дифференциальным уравнением (1) согласуется лучше.

На рис. 1 показана картина температурного поля, полученная при расчетах по выражению (5). Здесь же нанесена точками кривая температурного поля, полученная из решения системы уравнений (1), (2), (3) и (4) методом численного интегрирования [4] при тех же условиях.

При малых величинах критериев Био (от 0,5 и меньше) более точным решением будет следующее:

$$t(x, \tau) = t^{0}_{\text{сим.}}(x, \tau) + \kappa(x + l)\cdot\left[1 - \sum_{1}^{\infty} A^{0}_{n}\cdot\cos\mu^{0}_{n}\cdot e^{-(\mu^{0}_{n})^{2}\cdot Fo}\right], \qquad (6)$$

где $t^{0}_{\text{сим.}}(x, \tau)$ есть решение симметричной задачи при температуре среды $t_{co} = \frac{t_{c1} + t_{c2}}{2}$ и коэффициенте теплоотдачи $\alpha_0 = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$. Второе слагаемое такое же, как и в зависимости (5).

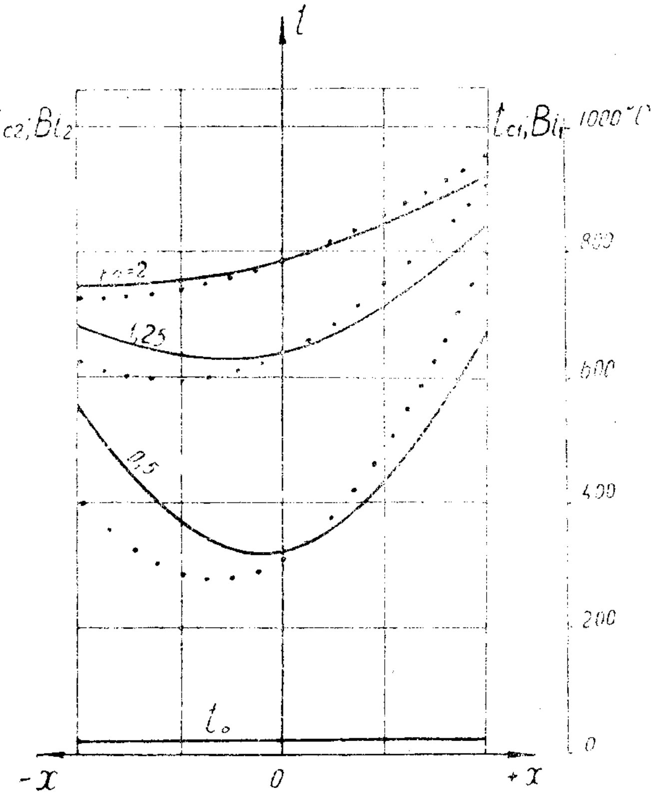

Рис. 1. Температурное поле неограниченной пластины ($Bi_1 = 3$; $Bi_2 = 1$; $t_{c1} = 1020°$ C; $t_{c2} = 720°$ C; $t_0 = 20°$ C.)

Таким образом, предложенные выражения (5) и (6) составлены из имеющихся в литературе симметричных решений. Это, во-первых, облегчает проведение расчета и, во-вторых, создает предположение о технической возможности установления сравнительно простой зависимости при любых граничных условиях, для которых существуют симметричные решения.

Проверка формул (5) и (6) производилась для условий установившегося режима.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. В. Пляцко. ИФЖ, № 10, 1959.
2. Г. И. Павловский. ИФЖ, № 4, 1962.
3. А. В. Лыков. Теория теплопроводности, Гостехиздат, 1952.
4. А. П. Ваничев. Труды НИИ-I, № 25, 1947.
5. Б. Ф. Гликман, ЖТФ, том 27, выпуск 12, 1957.