ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 119 1963 г.

О ТОЧНОМ И ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ ПРЯМОУГОЛЬНОГО БРУСА

Ю. А. КОРОЛЕНКО, Г. П. БОЙКОВ

(Представлено профессором, доктором Г. И. Фуксом)

Ранее [1] было высказано предположение, что в ряде случаев при решении дифференциального уравнения теплопроводности можно пользоваться представлением

$$\frac{\dfrac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2}}{\dfrac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2}} = \xi - 1. \tag{1}$$

Для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} + \frac{w}{\lambda} = 0 \tag{2}$$

с граничными условиями III рода при условии симметрии температурного поля на основании сделанного предположения может быть получено точное решение.

Учитываем (1) и условие симметрии, тогда решение уравнения (2) получает вид:

$$\vartheta_{xy} = B \cos kx \cdot \cos k \sqrt{\xi - 1}\, y \tag{3}$$

или

$$\vartheta_{xy} = B \cos k_n x \cdot \cos k_m y. \tag{3-а}$$

Используя обычную методику, определяем k_m; k_n и B. После подстановки находим (см. также [2])

$$\vartheta_{xy} = \frac{w}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_n \cdot A_m}{\dfrac{\mu_n^2}{R_1^2} + \dfrac{\mu_m^2}{R_2^2}} \cos \mu_n \frac{x}{R_1} \cos \mu_m \frac{y}{R_2} \cdot \tag{4}$$

Здесь

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{ctg} \mu_n &= \frac{\mu_n}{\mathrm{Bi}_n} = f\left(Bi_n = \frac{\alpha R_1}{\lambda}\right) \\ \operatorname{ctg} \mu_m &= \frac{\mu_m}{\mathrm{Bi}_m} = f\left(Bi_m = \frac{\alpha R_2}{\lambda}\right) \end{aligned}\right\}, \tag{5}$$

$$\left.\begin{aligned} A_n &= \frac{2\sin\mu_n}{\mu_n + \sin\mu_n\cdot\cos\mu_n} \\ A_m &= \frac{2\sin\mu_m}{\mu_m + \sin\mu_m\cdot\cos\mu_m} \end{aligned}\right\} . \tag{6}$$

Согласно (1), дифференциальное уравнение (2) приводится к системе уравнений вида

$$\frac{\partial^2\vartheta}{\partial x^2}\,\xi = -\frac{w}{\lambda},$$

$$\frac{\partial^2\vartheta}{\partial y^2}\,\frac{\xi}{\xi-1} = -\frac{w}{\lambda}, \tag{7}$$

которые позволяют получить решение

$$\vartheta_{xy} = D - \frac{w\,x^2}{2\,\xi\,\lambda} - \frac{\xi-1}{\xi}\,\frac{w\,y^2}{2\lambda}. \tag{8}$$

Последнее удовлетворяет условиям симметрии и дифференциальному уравнению теплопроводности.

Значения ξ и D могут быть получены лишь приближенно из энергетических соображений, если температуры на поверхностях тела заменить через соответствующие среднеинтегральные температуры. Тогда

$$\xi = \frac{\dfrac{R_1+R_2}{\alpha} + \dfrac{R_1^2+R_2^2}{3\lambda}}{\dfrac{R_2}{\alpha} + \dfrac{R_2^2}{3\lambda}}, \tag{9}$$

$$D = \frac{w\,R_1}{\alpha\,\xi} + \frac{w\,R_1^2}{2\,\xi\,\lambda} + \frac{\xi-1}{\xi}\,\frac{w\,R_2^2}{6\lambda}. \tag{10}$$

Расчеты показывают, что температурные поля прямоугольного бруса, найденные по приближенным (8—10) и точным (4—6) соотношениям, практически совпадают для очень широкого круга инженерных задач.

Так, для центра сечения тела ($x = y = 0$) отклонения Δ, даваемые формулой (8) по сравнению с величинами по (4), направлены в одну сторону и имеют значения, приведенные в табл. 1.

Таблица 1

Bi	0,1	1,0	10	100	∞
Δ %	0	−1,6	−6,8	−7,2	−7,3

Таким образом, для центральных точек тела достаточно надежные результаты может дать приближенное решение.

При $Bi < 0{,}5$ приближенные формулы могут быть использованы и для точек, близких к поверхности тела.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Н. Бойков. Прогрев тел конечных размеров под действием лучистого тепла. Известия ТПИ, том 101, Томск, 1958.
2. Шнейдер П. Инженерные проблемы теплопроводности. ИЛ. Москва, 1960.