

О ТОЧНОМ И ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ ПРЯМОУГОЛЬНОГО БРУСА

Ю. А. КОРОЛЕНКО, Г. П. БОЙКОВ

(Представлено профессором, доктором Г. И. Фуксом)

Ранее [1] было высказано предположение, что в ряде случаев при решении дифференциального уравнения теплопроводности можно пользоваться представлением

$$\frac{\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}}{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}} = \xi - 1. \quad (1)$$

Для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{w}{\lambda} = 0 \quad (2)$$

с граничными условиями III рода при условии симметрии температурного поля на основании сделанного предположения может быть получено точное решение.

Учитывая (1) и условие симметрии, тогда решение уравнения (2) получает вид:

$$v_{xy} = B \cos kx \cdot \cos k \sqrt{\xi - 1} y \quad (3)$$

или

$$v_{xy} = B \cos k_n x \cdot \cos k_m y. \quad (3-a)$$

Используя обычную методику, определяем k_m ; k_n и B . После подстановки находим (см. также [2])

$$v_{xy} = \frac{w}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_n \cdot A_m}{\frac{v_n^2}{R_1^2} + \frac{v_m^2}{R_2^2}} \cos v_n \frac{x}{R_1} \cos v_m \frac{y}{R_2}. \quad (4)$$

Здесь

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{ctg} v_n &= \frac{v_n}{Bi_n} = f \left(Bi_n = \frac{\alpha R_1}{\lambda} \right) \\ \operatorname{ctg} v_m &= \frac{v_m}{Bi_m} = f \left(Bi_m = \frac{\alpha R_2}{\lambda} \right) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} A_n &= \frac{2 \sin \mu_n}{\mu_n + \sin \mu_n \cdot \cos \mu_n} \\ A_m &= \frac{2 \sin \mu_m}{\mu_m + \sin \mu_m \cdot \cos \mu_m} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Согласно (1), дифференциальное уравнение (2) приводится к системе уравнений вида

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \xi = - \frac{w}{\lambda},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \frac{\xi}{\xi - 1} = - \frac{w}{\lambda}, \quad (7)$$

которые позволяют получить решение

$$v_{xy} = D - \frac{w x^2}{2 \xi \lambda} - \frac{\xi - 1}{\xi} \frac{w y^2}{2 \lambda}. \quad (8)$$

Последнее удовлетворяет условиям симметрии и дифференциальному уравнению теплопроводности.

Значения ξ и D могут быть получены лишь приближенно из энергетических соображений, если температуры на поверхностях тела заменить через соответствующие среднеинтегральные температуры. Тогда

$$\xi = \frac{\frac{R_1 + R_2}{\alpha} + \frac{R_1^2 + R_2^2}{3\lambda}}{\frac{R_2}{\alpha} + \frac{R_2^2}{3\lambda}}, \quad (9)$$

$$D = \frac{w R_1}{\alpha \xi} + \frac{w R_1^2}{2 \xi \lambda} + \frac{\xi - 1}{\xi} \frac{w R_2^2}{6 \lambda}. \quad (10)$$

Расчеты показывают, что температурные поля прямоугольного бруса, найденные по приближенным (8—10) и точным (4—6) соотношениям, практически совпадают для очень широкого круга инженерных задач.

Так, для центра сечения тела ($x = y = 0$) отклонения Δ , даваемые формулой (8) по сравнению с величинами по (4), направлены в одну сторону и имеют значения, приведенные в табл. 1.

Таблица 1

Bi	0,1	1,0	10	100	∞
$\Delta \%$	0	-1,6	-6,8	-7,2	-7,3

Таким образом, для центральных точек тела достаточно надежные результаты может дать приближенное решение.

При $Bi < 0,5$ приближенные формулы могут быть использованы и для точек, близких к поверхности тела.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. П. Бойков. Прогрев тел конечных размеров под действием лучистого тепла. Известия ТПИ, том 101, Томск, 1958.
2. Шнейдер П. Инженерные проблемы теплопроводности. ИЛ. Москва, 1960.