ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ
И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 259 1975

О СООТНОШЕНИИ МЕЖДУ СРЕДНИМИ ДВИЖУЩИМИ СИЛАМИ ПРЯМОТОЧНОГО И ПРОТИВОТОЧНОГО ПРОЦЕССОВ МАССООБМЕНА

Г. М. ИЗМАЙЛОВ

(Представлена научным семинаром кафедры процессов, аппаратов и кибернетики химических производств ХТФ)

В доказательстве превосходства средней движущей силы при противотоке над средней движущей силой при прямотоке содержится требование линейности как рабочих линий, так и линии равновесия [1]. В приводимом ниже доказательстве соотношения между средними движущими силами требование линейности сохраняется лишь для рабочих линий. К связи между равновесными составами фаз предъявлено условие более общего характера: ею может быть и нелинейная возрастающая функция.

Обозначим начальные и конечные значения состава для одной из фаз соответственно x_1 и x_2, а для другой фазы — y_1 и y_2. Зависимость между равновесными составами этих фаз представлена на сегменте $[x_1, x_2]$ возрастающей функцией

$$y^* = f(x), \tag{1}$$

причем на этом сегменте

$$y^* < y_1; \tag{2}$$

здесь y^* — состав данной фазы в условиях равновесия и при составе смежной фазы, равном x.

Рабочие составы фаз для процессов, сопоставляемых по средней движущей силе, связаны следующими уравнениями: для противоточного процесса (линия AB на рис. 1)

$$y = a(x - x_0) + y_0, \tag{3}$$

для прямоточного процесса (линия A_1B_1)

$$y = -a(x - x_0) + y_0; \tag{4}$$

здесь

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \tag{5}$$

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \tag{6}$$

$$y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}. \tag{7}$$

Соотношение между средними движущими силами определится в дальнейшем через число единиц переноса [2].

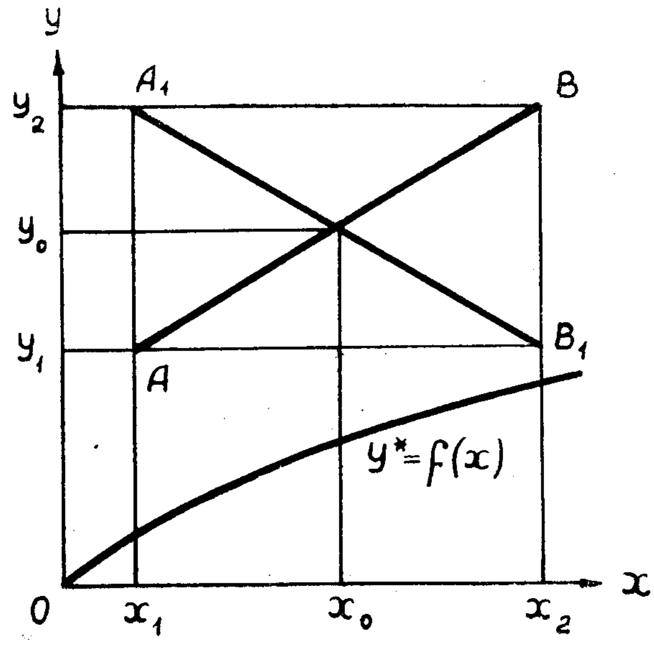

Рис. 1

На основании уравнений (3) — (7) общее выражение для числа единиц переноса

$$m_y = \int\limits_{y_1}^{y_2} \frac{dy}{y-y^*}$$

представит в следующей форме:
для противотока

$$m_y = a \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{(y_0-y^*)+a\,(x-x_0)}\,, \tag{8}$$

для прямотока

$$\overline{m}_y = a \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{(y_0-y^*)-a\,(x-x_0)}\,. \tag{9}$$

По (8) и (9) найдем разность между $\overline{m}_y$ и m_y и затем представим ее в виде следующей суммы двух интегралов:

$$\overline{m}_y-m_y = 2a^2 \int\limits_{x_1}^{x_0} \frac{x-x_0}{(y_0-y^*)^2-a^2(x-x_0)^2}\,dx + 2a^2 \int\limits_{x_0}^{x_2} \frac{x-x_0}{(y_0-y^*)^2-a^2(x-x_0)^2}\,dx. \tag{10}$$

На сегменте $[x_1, x_0]$ введем переменную z уравнением

$$x = x_0 - z, \tag{11}$$

где

$$0 \leqslant z \leqslant z_1 = \frac{x_2-x_1}{2}\,. \tag{12}$$

Обозначим

$$\varphi(z) = f(x_0-z) = f(x) = y^*, \tag{13}$$

$$F(z) = [y_0-\varphi(z)]^2 - a^2z^2 = (y_0-y^*)^2 - a^2(x-x_0)^2. \tag{14}$$

На сегменте $[x_0, x_2]$ введем переменную z уравнением

$$x = x_0 + z; \tag{15}$$

обозначим

$$\varphi_1(z) = f(x_0+z) = f(x) = y^*, \tag{16}$$

$$F_1(z) = [y_0-\varphi_1(z)]^2 - a^2z^2 = (y_0-y^*)^2 - a^2(x-x_0)^2. \tag{17}$$

На основании уравнений (11)—(17) выражению (10) придадим следующий вид:

$$\frac{\overline{m}_y - m_y}{2a^2} = \int_{z_1}^{0} \frac{zdz}{F(z)} + \int_{0}^{z_1} \frac{zdz}{F_1(z)}.$$

Отсюда получим

$$\frac{\overline{m}_y - m_y}{2a^2} = \int_{0}^{z_1} \frac{F(z)-F_1(z)}{F(z)\,F_1(z)}\, zdz. \tag{18}$$

Найдем соотношение между функциями $F(z)$ и $F_1(z)$.

Из (2) и (16) следует

$$\varphi_1(z) < y_1. \tag{19}$$

Используя (5), (7), (12), (19), из (17) получим

$$F_1(z) = [y_0-\varphi_1(z)]^2 - a^2z^2 > (y_0-y_1)^2 - a^2z^2 \geqslant (y_0-y_1)^2 - a^2z_1^2 = 0.$$

Следовательно, $F_1(z) > 0$. (20)

Вследствие возрастающего характера функции (1) ее значения, соответствующие сегменту $[x_1, x_0]$, будут меньше значений этой функции, определенных на сегменте $[x_0, x_2]$. Поэтому из (13) и (16) получим

$$\varphi(z) < \varphi_1(z). \tag{21}$$

Из (14), (17) и (21) следует

$$F(z) - F_1(z) = [y_0-\varphi(z)]^2 - [y_0-\varphi_1(z)]^2 > 0. \tag{22}$$

Теперь из (20) и (22) получим

$$F(z) > F_1(z) > 0. \tag{23}$$

Из (23) видно, что в (18) подынтегральная функция положительна. Следовательно, в (18) интеграл и вместе с ним разность между $\overline{m}_y$ и m_y есть величины положительные [3]. Из этого следует

$$\overline{m}_y > m_y.$$

Средняя движущая сила имеет следующие выражения:

для прямотока

$$\overline{\Delta y}_{\text{ср}} = \frac{y_2-y_1}{\overline{m}_y},$$

для противотока

$$\Delta y_{\text{ср}} = \frac{y_2-y_1}{m_y}.$$

Применив последнее неравенство к данным выражениям для средней движущей силы, получим искомое соотношение

$$\Delta y_{\text{ср}} > \overline{\Delta y}_{\text{ср}}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Н. Девятов. Труды Уральского научно-исследовательского химического института (УНИХИМ). Работы по технологии неорганических веществ и автоматическому контролю. Л., Госхимиздат, 1958, вып. VII, 147—149.
2. Справочник химика, т. V. «Химия», 1966.
3. В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. Основы математического анализа. М., «Наука», 1967.