

О СООТНОШЕНИИ МЕЖДУ СРЕДНИМИ ДВИЖУЩИМИ СИЛАМИ ПРЯМОТОЧНОГО И ПРОТИВОТОЧНОГО ПРОЦЕССОВ МАССООБМЕНА

Г. М. ИЗМАЙЛОВ

(Представлена научным семинаром кафедры процессов, аппаратов и кибернетики
химических производств ХТФ)

В доказательстве превосходства средней движущей силы при противотоке над средней движущей силой при прямотоке содержится требование линейности как рабочих линий, так и линии равновесия [1]. В приводимом ниже доказательстве соотношения между средними движущими силами требование линейности сохраняется лишь для рабочих линий. К связи между равновесными составами фаз предъявлено условие более общего характера: ею может быть и нелинейная возрастающая функция.

Обозначим начальные и конечные значения состава для одной из фаз соответственно x_1 и x_2 , а для другой фазы — y_1 и y_2 . Зависимость между равновесными составами этих фаз представлена на сегменте $[x_1, x_2]$ возрастающей функцией

$$y^* = f(x), \quad (1)$$

причем на этом сегменте

$$y^* < y_1, \quad (2)$$

здесь y^* — состав данной фазы в условиях равновесия и при составе смежной фазы, равном x .

Рабочие составы фаз для процессов, сопоставляемых по средней движущей силе, связаны следующими уравнениями: для противоточного процесса (линия AB на рис. 1)

$$y = a(x - x_0) + y_0, \quad (3)$$

для прямоточного процесса (линия A_1B_1)

$$y = -a(x - x_0) + y_0; \quad (4)$$

здесь

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad (5)$$

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad (6)$$

$$y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}. \quad (7)$$

Соотношение между средними движущими силами определится в дальнейшем через число единиц переноса [2].

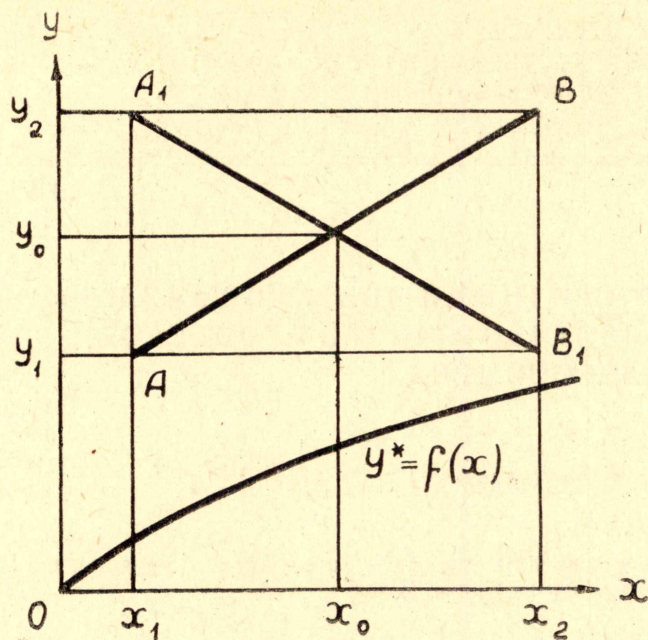


Рис. 1

На основании уравнений (3) — (7) общее выражение для числа единиц переноса

$$m_y = \int_{y_1}^{y_2} \frac{dy}{y - y^*}$$

предстанет в следующей форме:
для противотока

$$m_y = a \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{(y_0 - y^*) + a(x - x_0)}, \quad (8)$$

для прямотока

$$\bar{m}_y = a \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{(y_0 - y^*) - a(x - x_0)}. \quad (9)$$

По (8) и (9) найдем разность между $\bar{m}_y$ и m_y и затем представим ее в виде следующей суммы двух интегралов:

$$\bar{m}_y - m_y = 2a^2 \int_{x_1}^{x_0} \frac{x - x_0}{(y_0 - y^*)^2 - a^2(x - x_0)^2} dx + 2a^2 \int_{x_0}^{x_2} \frac{x - x_0}{(y_0 - y^*)^2 - a^2(x - x_0)^2} dx. \quad (10)$$

На сегменте $[x_1, x_0]$ введем переменную z уравнением

$$x = x_0 - z, \quad (11)$$

где

$$0 \leq z \leq z_1 = \frac{x_2 - x_1}{2}. \quad (12)$$

Обозначим

$$\varphi(z) = f(x_0 - z) = f(x) = y^*, \quad (13)$$

$$F(z) = [y_0 - \varphi(z)]^2 - a^2 z^2 = (y_0 - y^*)^2 - a^2 (x - x_0)^2. \quad (14)$$

На сегменте $[x_0, x_2]$ введем переменную z уравнением

$$x = x_0 + z; \quad (15)$$

обозначим

$$\varphi_1(z) = f(x_0 + z) = f(x) = y^*, \quad (16)$$

$$F_1(z) = [y_0 - \varphi_1(z)]^2 - a^2 z^2 = (y_0 - y^*)^2 - a^2 (x - x_0)^2. \quad (17)$$

На основании уравнений (14) — (17) выражению (10) придадим следующий вид:

$$\frac{\overline{m}_y - m_y}{2a^2} = \int_{z_1}^0 \frac{z dz}{F(z)} + \int_0^{z_1} \frac{z dz}{F_1(z)}.$$

Отсюда получим

$$\frac{\overline{m}_y - m_y}{2a^2} = \int_0^{z_1} \frac{F(z) - F_1(z)}{F(z) F_1(z)} z dz. \quad (18)$$

Найдем соотношение между функциями $F(z)$ и $F_1(z)$.

Из (2) и (16) следует

$$\varphi_1(z) < y_1. \quad (19)$$

Используя (5), (7), (12), (19), из (17) получим

$$F_1(z) = [y_0 - \varphi_1(z)]^2 - a^2 z^2 > (y_0 - y_1)^2 - a^2 z^2 \geq (y_0 - y_1)^2 - a^2 z_1^2 = 0.$$

Следовательно, $F_1(z) > 0$. (20)

Вследствие возрастающего характера функции (1) ее значения, соответствующие сегменту $[x_1, x_0]$, будут меньше значений этой функции, определенных на сегменте $[x_0, x_2]$. Поэтому из (13) и (16) получим

$$\varphi(z) < \varphi_1(z). \quad (21)$$

Из (14), (17) и (21) следует

$$F(z) - F_1(z) = [y_0 - \varphi(z)]^2 - [y_0 - \varphi_1(z)]^2 > 0. \quad (22)$$

Теперь из (20) и (22) получим

$$F(z) > F_1(z) > 0. \quad (23)$$

Из (23) видно, что в (18) подынтегральная функция положительна. Следовательно, в (18) интеграл и вместе с ним разность между $\overline{m}_y$ и m_y есть величины положительные [3]. Из этого следует

$$\overline{m}_y > m_y.$$

Средняя движущая сила имеет следующие выражения:
для прямотока

$$\Delta y_{\text{ср}} = \frac{y_2 - y_1}{\overline{m}_y},$$

для противотока

$$\Delta y_{\text{ср}} = \frac{y_2 - y_1}{m_y}.$$

Применив последнее неравенство к данным выражениям для средней движущей силы, получим искомое соотношение.

$$\Delta y_{\text{ср}} > \overline{\Delta y}_{\text{ср}}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Н. Девятков. Труды Уральского научно-исследовательского химического института (УНИХИМ). Работы по технологии неорганических веществ и автоматическому контролю. Л., Госхимиздат, 1958, вып. VII, 147—149.
2. Справочник химика, т. V. «Химия», 1966.
3. В. А. Ильин, Э. Г. Позняк, Основы математического анализа. М., «Наука», 1967.