

## О НЕКОТОРЫХ РАБОТАХ В ОБЛАСТИ АКСОНОМЕТРИИ

В. А. ВОСКРЕСЕНСКИЙ

(Представлена научным семинаром кафедр начертательной геометрии  
томских вузов)

В настоящей статье кратко рассмотрены наиболее, на наш взгляд, интересные работы по аксонометрии, выполненные советскими учеными.

Известно, что в теории аксонометрических проекций, интересующей как математиков, так и инженерно-технических работников, имеется вопрос о так называемой «проблеме Круппа», заключающейся в решении задачи получения при центральном проецировании изображения данной системы координат. При параллельном проецировании это задание сравнительно просто решает теорема Польке—Шварца.

Но при центральном проецировании задача усложняется, так как здесь инвариантом преобразования будет сложное отношение четырех точек на прямой. В результате нам приходится иметь дело с дезарговыми конфигурациями. Доказательств основной теоремы аксонометрии в случае центрального проецирования имеется несколько, о чем говорится в статье [1].

В дальнейшем исследования вышеупомянутой проблемы провел О. Я. Рюнк в своей кандидатской диссертации на тему: «Фундаментальная задача аксонометрии в центральной проекции», законченной в 1956 г. в Таллине, где отметил, что наиболее целесообразное обобщение 2-й теоремы Круппа было сделано Н. М. Бескиным, но вследствие замены масштабного тетраэдра на дезаргову конфигурацию исчезло аксонометрическое содержание, поскольку определение каждой координаты через двойное отношение связано с очень большим количеством вычислений, что для практических целей непригодно.

В связи с этим, возник вопрос о выборе такой фигуры, которая по форме была бы близка к тетраэдру. О. Я. Рюнк предложил такой фигурой считать совокупность вершин тетраэдра с несобственной точкой одного масштабного ребра. Полученная плоская фигура из 5 точек, три из которых лежат на одной прямой, является центральной проекцией такого объекта.

Основная теорема центральной аксонометрии, по О. Я. Рюнку, формулируется следующим образом: «Перспектива масштабного тетраэдра ортогональной равномасштабной системы координат вместе с точкой схода одной координатной оси определяет положение осей и центра проекций относительно картинной плоскости».

Здесь уместно вспомнить формулировку этой теоремы у профессора И. И. Котова [2]: «Треугольник следов комбинированного изображе-

ния пространственной системы координат в центральной проекции гомотетичен треугольнику линий схода ее координатных плоскостей при центре гомотетии, представляющем собой центральную проекцию начала координат».

Если сравнить предложение И. И. Котова с формулировкой О. Я. Рюнка, то можно заметить некоторое сходство, а именно: О. Я. Рюнк для того, чтобы определить положение координатных осей и центра проекций (точнее — центра проецирования) на картинной плоскости, использует несобственную точку одной координатной оси. У профессора И. И. Котова говорится о дополнении координатных плоскостей проекциями несобственных прямых, что будет соответствовать трем несобственным точкам на координатных осях.

Далее следует отметить, что О. Я. Рюнк так же, как и профессор И. И. Котов, демонстрирует практическое использование центральной аксонометрии аналогично ортогональной изометрии. В этом случае координатный трехосник должен быть изоклинным, т. е. равнонаклонным к картинной плоскости [3].

Как известно, основная метрическая задача центральной аксонометрии сводится к построению плоской дезарговой конфигурации, представляющей проекцию ранее заданной пространственной дезарговой конфигурации. Здесь уместно отметить, что В. Н. Первикова в своей статье [4] рассмотрела частный случай этой задачи, когда пространственная дезарговая конфигурация есть тетраэдр, дополненный несобственными элементами его ребер и граней. Автор доказала теоремы об определении положения центра проецирования и плоскости проекций для тетраэдра как произвольной формы, так и с прямым трехгранным углом.

Применение метода координат к решению задач в центральных проекциях демонстрировал в своей работе С. М. Дешевой [5]. Им были рассмотрены задачи на построение центральной проекции точки в пространстве, плоской фигуры заданных размеров, определение истинной величины углов между основными геометрическими элементами и расстояний между ними.

Трудность выполнения таких примеров в сложности построений, когда целый ряд вспомогательных графических операций накладывается на основной чертеж.

Интересный обзор сочинений, связанных с центральной аксонометрией, сделал доцент В. А. Маневич в 1960 г. в докладе на научной конференции кафедр начертательной геометрии Московского авиационного института [6]. В этом сообщении автор отметил диссертацию О. Я. Рюнка и статью Н. В. Палувер [7]. Замечания, высказанные В. А. Маневичем, касались прежде всего исследований О. Я. Рюнка, который все решения одного из вариантов центральной аксонометрии свел к системе уравнений высших степеней, не решив ее совместности. Что касается работы Н. В. Палувер, то здесь были несколько упрощены выкладки, приведенные в диссертации О. Я. Рюнка.

В. А. Маневич предложил конструктивное, чисто синтетическое решение задачи о возможности центрального проецирования данного произвольного тетраэдра в данный полный четырехугольник на основе центрального соответствия.

Н. Ф. Четверухин в своей статье [8], опубликованной в 1963 г., отметил, что к этому времени в нашей стране были получены довольно значительные успехи, связанные с различными обобщениями основной теоремы центральной аксонометрии. Сюда относятся вышеупомянутые исследования И. И. Котова, О. Я. Рюнка, Н. В. Палувер, В. А. Мане-

вича и др. Помимо этого, В. Н. Первикова определила, что геометрическим местом центров проецирования произвольного тетраэдра является пространственная кривая 16-го порядка.

На основе этого появилась возможность сделать уже некоторые выводы о проецировании данного тетраэдра с точкой на ребре в данный плоский четырехугольник с точкой на его стороне. Эту задачу Н. Ф. Четверухин предложил в ноябре 1955 г. на конференции кафедр начертательной геометрии в г. Батуми [9]. В результате задача получила в общем случае около 8 решений, но не исключено, что все они являются мнимыми и, таким образом, вопрос о существовании действительной проекции остается открытым, хотя профессор И. И. Котов установил, что в отдельных случаях задача имеет действительное решение. Кроме этого, он рассмотрел задачу проецирования тетраэдра с точкой на грани, но положительное решение ему удалось получить только при условии положения точки на кривой 8-го порядка.

Н. Ф. Четверухин отметил, что «попытки рассмотрения и решения этих вопросов в иностранной литературе не принесли ничего нового».

Говоря о многомерном обобщении основной теоремы как у нас, так и за рубежом, Н. Ф. Четверухин назвал имена В. Н. Первиковой и чехословацкого геометра Вацлава Гавела, давших многомерные обобщения теорем Польке, Гаусса, Вейсбаха и Штифеля при условии проецирования на гиперплоскость. Помимо этого, много результатов частного характера получено советскими и иностранными учеными (Котов, Ламбин, Штифель, Хоенберг и др.).

Большой вклад в развитие теории аксонометрии сделал Н. М. Бескин. Он довольно подробно рассмотрел взаимоотношения между различными теоремами существования в центральных аксонометрических проекциях. Им, пожалуй, впервые в истории развития аксонометрии были обобщены теоремы Чевы и Менелая на  $n$ -мерное пространство, что дало дополнительные результаты, послужившие в дальнейшем для решения основных задач центральной аксонометрии. Предварительно Н. М. Бескин показал, как ранее опубликованные исследования [10, 11] в трехмерном пространстве получили обоснование для рассмотрения  $n$ -мерного пространства.

Автор синтетическим путем доказал новые теоремы центральной аксонометрии в неевклидовом пространстве. Хотя полученные результаты не нашли еще непосредственного приложения, но, тем не менее, они могут служить в дальнейшем для решения различных практических задач, в особенности при построении аксонометрических проекций по заданным требованиям.

Большой заслугой Н. М. Бескина следует считать рассмотрение им трех основных проблем центральной аксонометрии, суть которых состоит в следующем:

А) Каковы возможности определения проектирующего аппарата (центра проектирования и плоскости проекций), чтобы получить изображение  $D$ , конгруэнтное  $D^0$ , если дана произвольная пространственная дезаргова конфигурация  $D'$  ( $O', A'_1, A'_2, A'_3; B'_1, B'_2, B'_3; C'_1, C'_2, C'_3$ ) и произвольная плоская дезаргова конфигурация  $D^0$  ( $O^0; A_1^0; A_2^0; A_3^0; B_1^0, B_2^0, B_3^0; C_1^0, C_2^0, C_3^0$ ).

В) С каким минимальным искажением можно воспроизвести данный образец, если в общем случае нельзя получить изображение  $D$ , конгруэнтное данному образцу  $D^0$ ?

С) При каких условиях, налагаемых на пару ( $D'D^0$ ), можно получить изображение  $D$ , конгруэнтное данному образцу  $D^0$ ?

Н. М. Бескин не упускает случая сделать некоторый исторический экскурс, касающийся развития основной теоремы аксонометрических проекций. Говоря о происхождении основной теоремы параллельной аксонометрии, он отметил, что первоначальное открытие этой теоремы должно принадлежать К. Ф. Гауссу (1777—1855), немецкому математику, который в 1831 г. рассмотрел частный случай ортогонального проектирования трех взаимно перпендикулярных прямых.

Но поскольку эту теорему Гаусс привел для иллюстрации использования комплексных чисел в геометрии, то он не придавал ей значения как теореме, касающейся аксонометрических параллельных проекций.

В своей докторской диссертации «Теоретические основы многомерной центральной аксонометрии», выполненной в 1967 г., Н. М. Бескин привел более точный перевод второй теоремы Круппа, которая формулируется следующим образом: «Три произвольные пары точек  $x'' x''_f$ ;  $y'' y''_f$ ;  $z'' z''_f$  в плоскости изображений, носители которых пересекаются в одной точке  $u''$ , могут рассматриваться как вторичное изображение трехреберника  $u(x, y, z)$ , конгруэнтного наперед заданному трехребернику, причем  $x''_f, y''_f, z''_f$  — точки схода осей» ( $f$  — начальная буква слова *Fluchtpunkt*).

Кроме этого, Н. М. Бескин отметил, что вопросы центральной аксонометрии интересовали Л. Гофмана, который в 1926 г. доказал первую теорему Круппа для вырожденного случая, когда в данной конфигурации  $O'A'B'C'$  имеем  $\angle A'O'B' = \angle B'O'C' = \angle C'O'A' = 90^\circ$ , а  $O'A' = O'B' = O'C'$ , а точки  $A', B'$  и  $C'$  — несобственные.

Эту же теорему, независимо от Л. Гофмана, доказал Е. М. Мchedlishvili, но для невырожденного случая.

В связи с этим Н. М. Бескин предлагает назвать теорему, относящуюся к невырожденному случаю — теоремой Е. М. Мchedlishvili, а к вырожденному — теоремой Л. Гофмана.

Продолжая дальнейшие исследования, Н. М. Бескин применил эти теоремы для  $n$ -мерного пространства и результаты опубликовал в Трудях Грузинского политехнического института в 1967 г. [12].

Работы Н. М. Бескина в области аксонометрии представляют соответствующий интерес для геометров-математиков, так как автор в большинстве случаев излагает доказательства тех или иных теорем чисто математическим путем, мало используя графические изображения.

Следует заметить, что проблемой А), то есть определением проектирующего аппарата, занялся Л. В. Бородин, который сформулировал две теоремы существования для центральных проекций [13].

Несколько обособленно, по сравнению со всеми имеющимися работами, касающимися аксонометрических проекций, стоит монография Л. Н. Лихачева [14]. Задачи, поставленные им, относятся к современной теории изображений и связаны с применением проективных и проекционных методов к кинематическому анализу законов движения объектов по кинофильмам, отображающим это движение. Предложенная Л. Н. Лихачевым теория, так называемой кинеперспективы, синтезирует вопросы проективной геометрии, кино, параллельного проецирования, кинематики и центральной аксонометрии.

Автором были предварительно рассмотрены составленные им перспективно-ортогональные сопряжения (ПОС — проекции). Опираясь на известную работу Н. А. Рынина [15], Л. Н. Лихачев исследовал движение фотографируемых предметов на основании ряда их последовательных изображений в кинофильмах.

Большое внимание он уделил метрическому анализу последних, а также точности получаемых результатов. Таким образом, труд Л. Н. Ли-

хачева, несмотря на специфичность рассмотренных им вопросов, можно отнести к сочинениям, решающим метрические задачи при центральном проецировании. Приемы кинеперспективного анализа, по мнению автора, дают большие возможности практического применения его не только для кинофильмов, но и для решения некоторых динамических задач механики, что должно в дальнейшем составить новую область исследования, называемую динамоперспективой.

В заключение данной статьи можно сделать следующие выводы:

1. Исследование «проблемы Круппа» является одним из важных вопросов теории современных аксонометрических проекций.
2. Наиболее интересные решения поставленной задачи в центральной аксонометрии сделали наши ученые: И. И. Котов, О. Я. Рюнк, В. Н. Первикова, В. А. Маневич, Н. М. Бескин, Л. Н. Лихачев и др.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Воскресенский. О теоретических исследованиях в области аксонометрии. Изд. Томск. Гос. ун-та, Изв. ТПИ, т. 143, 1966.
2. И. И. Котов. Комбинированные изображения. М. Изд. Моск. авиац. института, 1951.
3. О. Я. Рюнк. О применении центральной аксонометрии на практике. Сб. «Вопросы теории, приложений и методики преподавания начертательной геометрии». Рига. Изд. Рижск. инст. инж. возд. флота, 1960.
4. В. Н. Первикова. Основная метрическая задача центральной аксонометрии. Сб. «Вопросы теории, приложений и методики преподавания начертательной геометрии». Рига. Изд. Рижского инст. инж. возд. флота, 1960.
5. С. М. Дешевой. Применение метода координат к решению метрических задач в центральных проекциях. Сб. научных трудов Ленингр. механического института. Вып. 13. Изд. Ленингр. механ. инст., 1959.
6. В. А. Маневич. Обзор некоторых работ, связанных с основной теоремой центральной аксонометрии. Тезисы докладов научной конференции кафедры начертательной геометрии. Изд. Московск. авиационного института. 1960.
7. Н. В. Палувер. Определение системы координатных осей в пространстве по ее центральной проекции. Труды Таллинского политехнического института. Серия А, № 100, Таллин, 1957.
8. Н. Ф. Четверухин. О направлениях и организации научной работы на кафедрах начертательной геометрии и черчения. Труды Московского научно-методического семинара по начертательной геометрии и инженерной графике. Вып. II, М., 1963.
9. Н. Ф. Четверухин. О научно-исследовательской работе в области начертательной геометрии. Труды Грузинского политехнического института. Сб. «Начертательная геометрия и инженерная графика», № 1 (49), Тбилиси, Изд. Груз. политех. инст. 1957.
10. Н. М. Бескин. Аналог теоремы Польке-Шварца в центральной аксонометрии. Доклады АН СССР, т. L, 1945.
11. Н. М. Бескин. Методы изображения. Энциклопедия элементарной математики, кн. 4, Геометрия, М., Физматгиз, 1963.
12. Н. М. Бескин. Теоремы Гофмана и Мчедлишвили в  $n$ -мерном пространстве. Труды Грузинского политехнического института. Сб. трудов по начертательной геометрии и инженерной графике. Тбилиси. Изд. Груз. политехн. инст. 1967.
13. Л. В. Бородин. К вопросу метризации центральных проекций. Материалы к научной сессии по прикладной математике и механике. Новокузнецк. Изд. Сиб. металлург. инст., 1967.
14. Л. И. Лихачев. Кинопереоспектива. Рига. Изд. Рижск. инст. инж. гражд. возд. флота, 1960.
15. Н. А. Рынин. Кинопереоспектива. М., Кинофотоиздат, 1936.