ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМЕНИ С. М. КИРОВА

Том 261 1975

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КРУГОВЫХ СЕЧЕНИЙ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА ПРИ РЕШЕНИИ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Э. Э. МАНАШЕРОВ

(Представлена научным семинаром кафедр начертательной геометрии томских вузов)

В решении ряда задач начертательной геометрии используется известное свойство поверхностей второго порядка: если плоскость, пересекающая данную поверхность, проходит параллельно плоскости одного из семейств окружностных сечений, то фигурой сечения поверхности является окружность.

С использованием окружностных сечений могут быть решены следующие задачи: а) построение недостающей проекции точки, принадлежащей поверхности; б) построение прямой и плоскости, касательной к поверхности; в) построение сечений поверхности плоскостью и точек пересечения прямой с поверхностью; г) взаимное пересечение поверхностей.

Касательная плоскость к поверхности

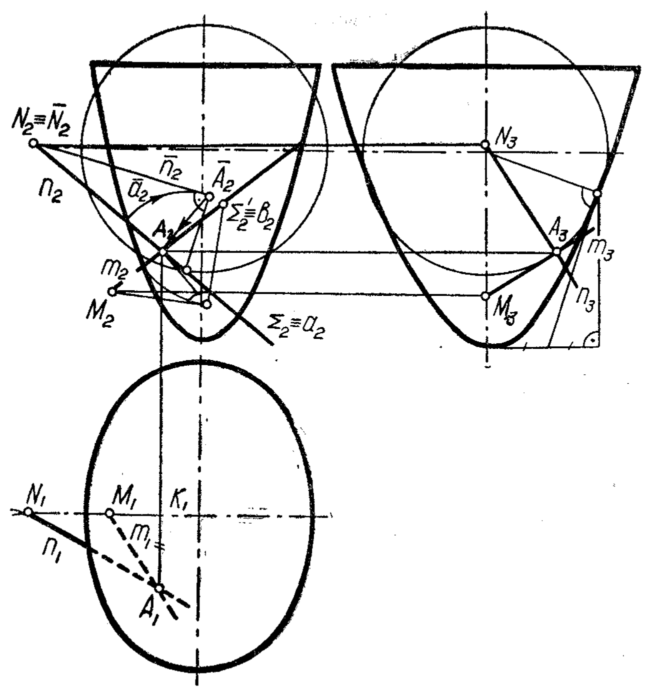
Пример I. Пусть в точке A (задана фронтальная проекция) поверхности эллиптического параболоида (фиг. 1) требуется провести касательную плоскость.

Через точку A проходят две окружности (a и b), касательные к которым определят искомую касательную плоскость, т. е. задача сводится к построению двух касательных прямых n и m.

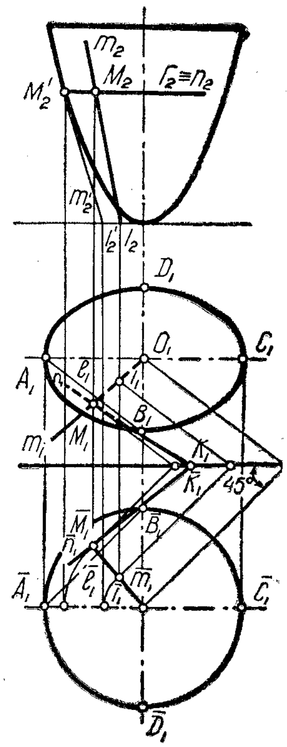
Касательная n к окружности a построена следующим образом. Вспомогательная проекция $\overline{A}_2$ находится на пересечении дуги a_2 с перпендикуляром, восставленным из A_2 к a_2. Перпендикуляр A_2N_2 к O_2A_2 есть вспомогательная проекция n_2 касательной $nn_2 \equiv a_2$. Горизонтальная проекция A_1 определяется откладыванием от Λ по вертикальной линии связи отрезка $K_1A_1 = A_2\overline{A}_2$, проекция N_1 находится на Λ. Прямая $N_1A_1 \equiv n_1$ определяет горизонтальную проекцию касательной n к окружности a. Аналогично построена касательная m к окружности b.

Естественно, что этот прием построения касательной плоскости подходит для всех поверхностей второго порядка, имеющих семейства окружностных сечений [1, 2, 3]. Причем касательная плоскость может быть проведена как через точку, выбранную на самой поверхности, так и вне ее.

Задача на построение касательной плоскости к приведенным поверхностям второго порядка может быть решена преобразованием за-



Фиг. 1.



Фиг. 2.

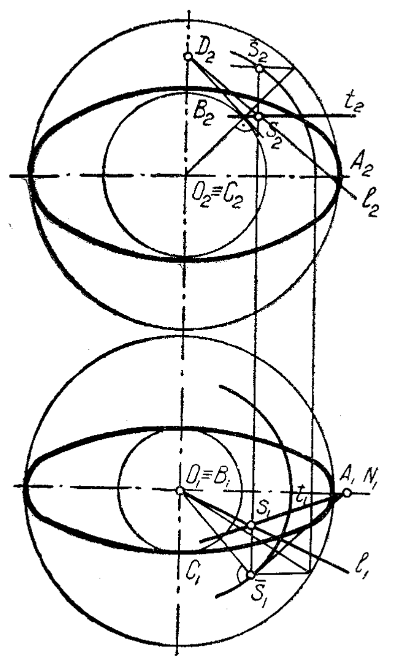
данной поверхности в поверхность вращения и последующим решением задачи известным приемом для поверхности вращения. Приведем один пример, используя аффинное преобразование пространств.

Пример 2. Пусть задана поверхность эллиптического параболоида (фиг. 2). Требуется по заданной фронтальной проекции M_2 определить горизонтальную проекцию M_1 точки M, принадлежащей поверхности, и построить касательную плоскость к поверхности эллиптического параболоида в этой точке. С помощью родственного преобразования пространства [4] преобразуем поверхность эллиптического параболоида в поверхность вращения. За плоскость родства взята фронтальная плоскость Λ, направление родства перпендикулярно плоскости Λ. Чтобы эллиптическое основание преобразовать в окружность, проведем следующее построение. Через точки A_1 и B_1 проводим прямую l_1 до пересечения с Λ_1 и находим двойную точку преобразования $K_1 \equiv \bar{K}_1$. Из этой точки проводим родственную прямую $\bar{l}_1$ под углом 45° к Λ_1 и находим точки $\bar{A}_1$ и $\bar{B}_1$. Точки $\bar{C}_1$ и $\bar{D}_1$ определяются без особых построений. Точку $\bar{M}_1$ находим как недостающую проекцию точки M на преобразованной поверхности — параболоиде вращения. Точка M_1 находится как точка родственная $\bar{M}_1$. Из $\bar{M}_1$ проводим прямую, параллельную $\bar{l}_1$, до пересечения с Λ_1, а затем параллельно l_1 до пересечения с направлением родства из точки $\bar{M}_1$. Для построения касательной плоскости проведем касательные прямые: n к горизонтальному сечению — параллели и m к меридиональному сечению — параболе поверхности вращения. Затем обратным преобразованием находим положение касательных. Причем фронтальные проекции n_2 и m_2 остаются без изменения, m_1 проходит через M_1 в центр эллипса. Прямую n_1 строим как родственную $\bar{n}_1$. Касательная $\bar{n}_1$ проведена в точке $\bar{M}_1$ окружности — сечение плоскостью Γ поверхности параболоида вращения. Прямые n и m определяют искомую касательную плоскость T в точке M поверхности.

Естественно, что с другими поверхностями второго порядка общего вида можно решить задачу на построение касательной плоскости и нахождение недостающей проекции точки аналогичным образом.

Задача на построение касательной плоскости к поверхности трехосного эллипсоида решается также с использованием родственного преобразования (растяжения или сжатия) поверхности трехосного эллипсоида в сферическую поверхность и обратно [5].

Пример 3. Задана поверхность трехосного эллипсоида (фиг. 3). Требуется построить касательную плоскость к поверхности в точке S (задана фронтальная проекция S_2) на ней.



Фиг. 3.

Предварительно по фронтальной проекции S_2 строится горизонтальная проекция S_1 точки S. Здесь по существу применяется двойное родственное преобразование. Трехосный эллипсоид вначале преобразуется в двухосный (вращения). За плоскость родства принимается горизонтальная плоскость. Горизонтальная проекция поверхности остается без изменения, фронтальная проекция преобразуется в окружность с радиусом, равным большой полуоси OA. При этом фронтальная проекция точки S_2 переходит в $\bar{S}_2$. Затем эллипсоид вращения преобразуется в сферу радиусом OA. При втором преобразовании за плоскость родства принимается фронтальная плоскость. Преобразованная горизонтальная проекция S_1 определится как точка, принадлежащая сфере. Обратным преобразованием (сжатием) сферы в эллипсоид вращения находим искомую горизонтальную проекцию S_1 точки S.

Построение касательной плоскости в точке S сводится к построению двух касательных прямых. Одна прямая —κ— проводится касательно к горизонтальному сечению (без построения самого сечения эллипса), другая — l касательная к сечению, которое проходит через среднюю ось трехосного эллипсоида. Каждое из эллиптических сечений преобразуется в окружность, строятся касательные прямые к окружностям, и обратным преобразованием находятся касательные t и $l \cdot D_2S_2 \equiv l_2$; $l_1 = D_1S_1$; t_2 проводится через S_2 параллельно O_2A_2; $t_1 \equiv S_1N_1$. Таким образом, касательная плоскость $T \equiv t \times l$ построена.

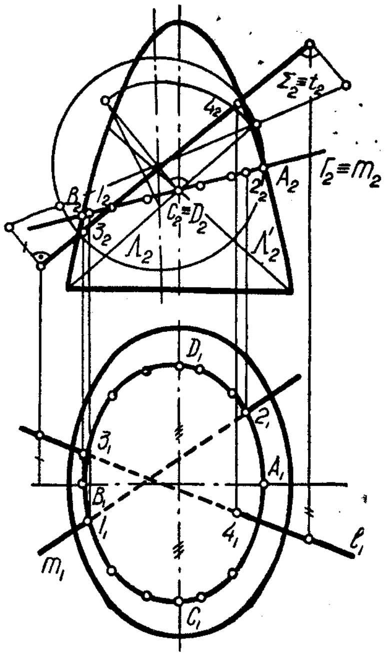
Преимуществом приведенного приема является то, что он не требует построения очерка поверхности.

Однако предлагаемый автором прием использования круговых сечений, как это видно из ранее изложенного, проще и обладает достаточной общностью.

Пересечение поверхности плоскостью и прямой

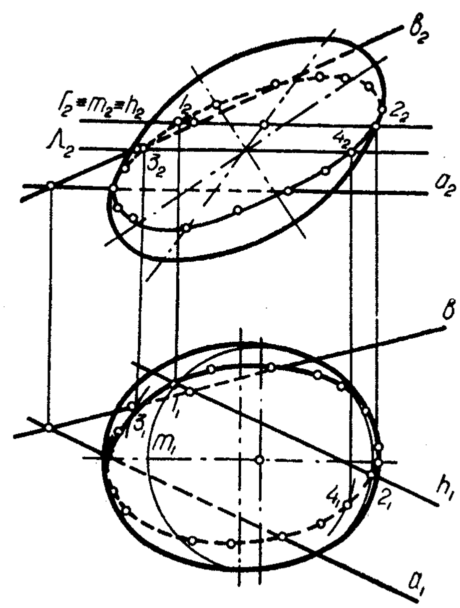
Пример 4. Пусть задана поверхность эллиптического параболоида (фиг. 4) и требуется построить сечение поверхности фронтально-проецирующей плоскостью. Фронтально-проецирующая плоскость Σ параллельна плоскости семейства круговых сечений Λ и поэтому пересекает данную поверхность по окружности. Окружность получится в сечении поверхности и от плоскости Σ', параллельной плоскости другого семейства круговых сечений Λ'. Это относится к поверхности второго порядка, имеющей две системы круговых сечений.

Плоскость Г также проецирующая, но не параллельна ни плоскости Λ, ни плоскости Λ^1. Поэтому для построения сечения придется использовать плоскости-посредники, проводя их параллельно плоскости Λ или Λ^1. Плоскости-посредники пересекают поверхность по окружностям, а плоскость Г по фронтально-проецирующим прямым. Пересечение окружности n и прямой дает нам две точки C и D сечения. Высшая A и низшая B точки сечения по существу определены, так как на чертеже уже имеются их фронтальные проекции. Остальные точки сечения строятся аналогично точкам C и D. В сечении плоскостью Г получается эллипс, который можно было построить по осям. Большая ось A_2B_2 задана, малая ось определяется как хорда окружности, плоскость которой проходит через определяемый эллипс. Так можно строить каждое эллиптическое сечение, которое перпендикулярно плоскости омбилических диаметров. Омбилическим диаметром называется прямая, на которой расположены центры окружностных сечений одного семейства. На поверхности в общем случае два омбилических диаметра. Омбилические диаметры образуют плоскость, которую назовем плоскостью омбилических диаметров. Эта плоскость является также плоскостью симметрии поверхности.



Фиг. 4.

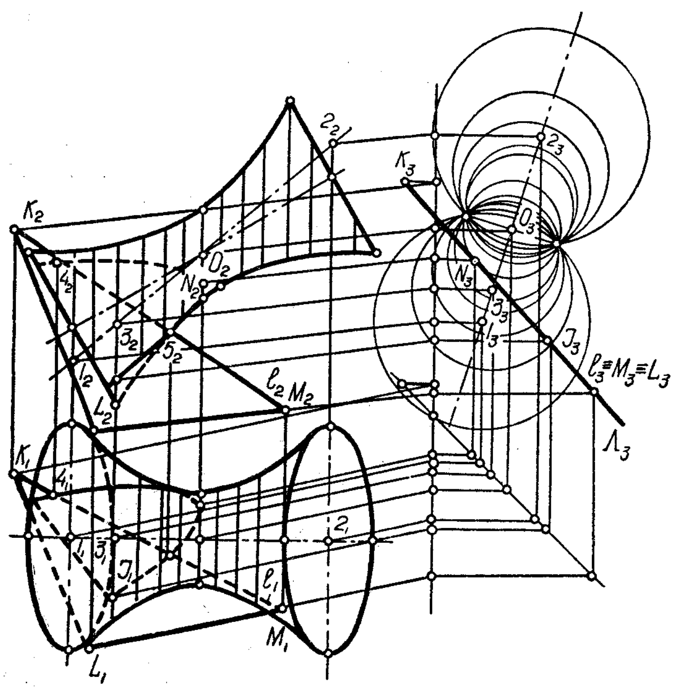
Пример 5. Задана поверхность трехосного эллипсоида (фиг. 5). Требуется построить сечение поверхности плоскостью Σ $(a \times в)$, которая является плоскостью общего положения. И в этом случае используем плоскости-посредники, которые проводим параллельно плоскости кругового сечения Λ. Плоскость Λ в данном случае параллельна горизонтальной плоскости проекций Π_1. Плоскость-посредник Г пересекает поверхность трехосного эллипсоида по окружности m, а плоскость Σ по горизонтали h; $\Gamma_2 \equiv m_2 \equiv h_2$. Так как прямая является горизонталью, то $h_2 \| a_2$, а $h_1 \| a_1$. Пересечение прямой h с окружностью m дает две точки 1 и 2 сечения. Остальные точки сечения 3, 4 и другие построены аналогичным образом.



Фиг. 5.

Задача на построение плоских сечений поверхностей второго порядка общего вида, имеющих два семейства круговых сечений, решается также с применением вспомогательного проецирования на плоскость, параллельную плоскости одного из семейств круговых сечений [6, стр. 88].

Пример 6. Задана поверхность общего однополостного гиперболоида (фиг. 6). Требуется построить сечение поверхности плоскостью Λ, заданной треугольником KLM. За вспомогательную плоскость взята профильная плоскость проекции Π_3, за направление проецирования сторона треугольника LM. Так как плоскости одного семейства круговых сечений параллельны Π_3, то окружности на эту плоскость проецируются без всяких искажений и их центры располагаются на прямой $1_3 2_3$ — вспомогательной проекции омбилического диаметра. Плоскость Λ (KLM) спроецируется в виде прямой Λ_3. Пересечение вспомогательных проекций окружностей и плоскости (Λ_3) дадут проекции искомых точек сечения. Обратным проецированием переносим их на заданные проекции. На чертеже показано построение точки J. Соприкасающаяся окружность к Λ_3 дает проекцию N_3 крайней правой точки N сечения.



Фиг. 6.

Пример 7. Пусть задана поверхность эллиптического параболоида и прямая m (фиг. 4). Требуется определить точки пересечения прямой с поверхностью. Задача решается общим приемом. Через прямую m проводится плоскость Γ и находится сечение, которое в пересечении с прямой m дает две искомые точки 1 и 2.

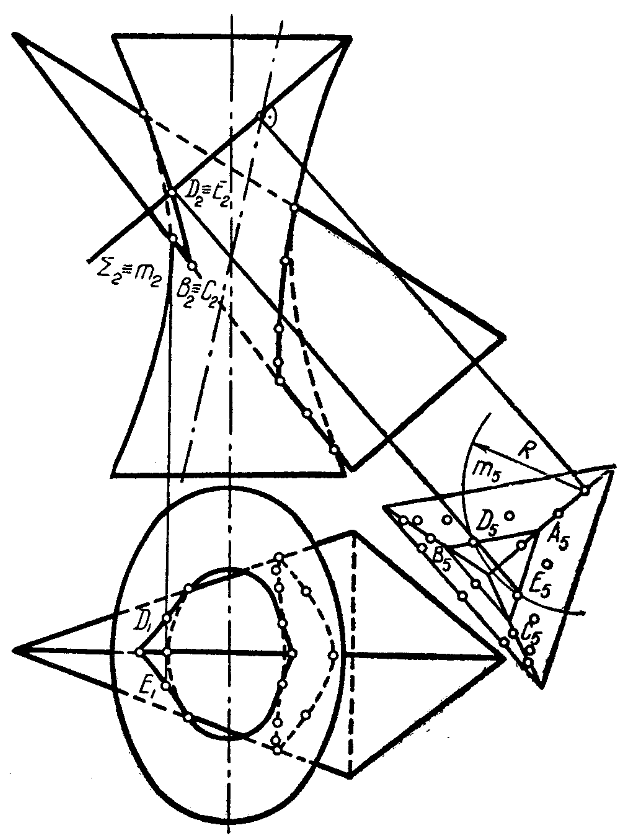
Если прямая (l) параллельна плоскости круговых сечений, то построение упрощается, так как вспомогательная плоскость (Σ) дает в сечении окружность, которая в пересечении с заданной прямой (l) дает две искомые точки (3 и 4). Построения для этой задачи приведены на фиг. 4.

Предположим, требуется построить точки пересечения прямой $l \equiv KM$ (фиг. 6) с поверхностью общего однополостного гиперболоида. Эту задачу можно решить с помощью вспомогательного проецирования на плоскость Π_3. Π_3 выбрана параллельно плоскости из семейств круговых сечений. Через прямую l проводим плоскость Λ (KLM), которая является проецирующей по отношению к новой плоскости изображений. Линия сечения поверхности плоскостью Λ в пересечении с прямой l дает искомые точки пересечения 4 и 5.

Взаимное пересечение плоскостей

Рассмотрим некоторые примеры на построение линии пересечения поверхностей с использованием круговых сечений. Пусть поверхность второго порядка общего вида пересекается с гранной поверхностью. При построении линии пересечения поверхности второго порядка, имеющей две системы круговых сечений с гранной поверхностью, задача по существу сводится к построению линии пересечения каждой грани (плоскости) с поверхностью.

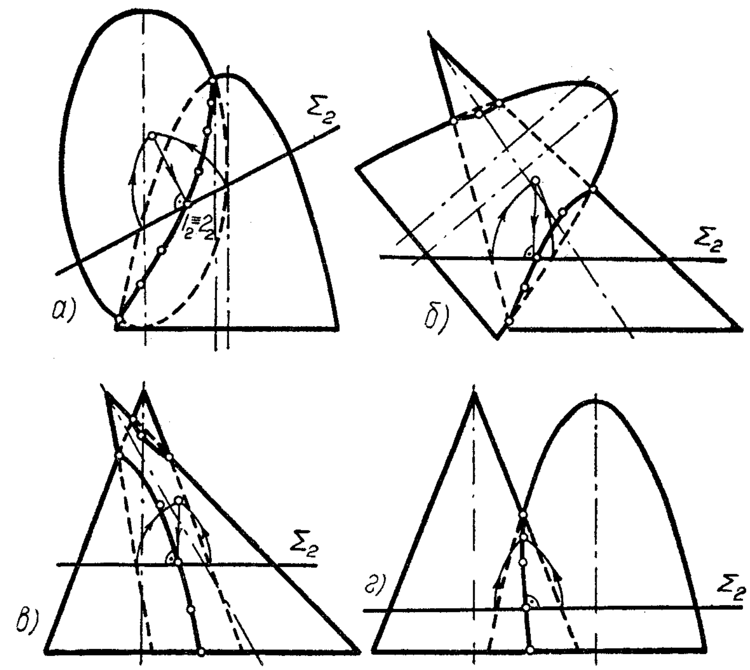
Пример 8. Задана поверхность однополостного эллиптического гиперболоида и трехгранная пирамида (фиг. 7). Требуется построить линию пересечения заданных поверхностей. Задача решена с помощью плоскостей - посредников, параллельных плоскости круговых сечений. Плоскость-посредник Σ пересекает гиперболоид по окружности m, а пирамиду по треугольнику ABC. Окружность и треугольник пересекаются в данном случае в двух искомых точках D и E. Эти точки легко находятся на новой плоскости проекции Π_5, которая параллельна Σ, так как m_5 есть окружность $D_5 = A_5B_5 \times m_5E_5 = A_5C_5 \times m_5$. Обратным проецированием находим фронтальные и горизонтальные проекции точек D и E. Аналогичным образом находятся остальные точки.



Фиг. 7.

Пример 9. Заданы поверхности трехосного эллипсоида и эллиптического гиперболоида, плоскости круговых сечений которых одинаково направлены (фиг, 8, а). Требуется построить линию пересечения этих поверхностей. В этом случае плоскости омбилических диаметров обеих поверхностей совпадают и параллельны Π_2. Плоскость-посредник Σ выбираем параллельно круговым сечениям, поэтому сечениями поверхностей являются две окружности, пересечение которых дает две общие точки 1 и 2.

Решение задачи дано в одной проекции вращением вокруг прямой, соединяющей центры окружностей сечения. Плоскости обеих окружностей располагаем параллельно плоскости Π_2, что сразу дает нам вспомогательные проекции точек 1 и 2. Обратным вращением находим фронтальные проекции $1_2 \equiv 2_2$ искомых точек. На вспомогательной проекции использованы только дуги окружностей. Таким же образом строятся остальные точки линии пересечения.



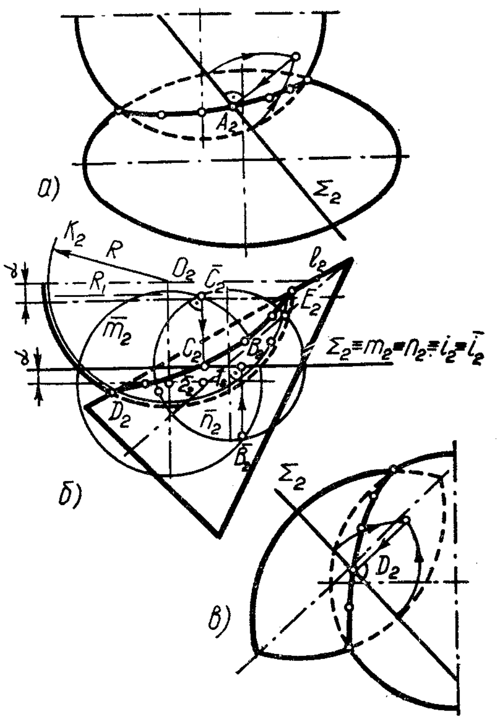
Фиг. 8.

Приведенный прием позволяет строить линию пересечения поверхностей, которые имеют общую плоскость симметрии, параллельную плоскости изображений. Если бы плоскости симметрии поверхностей были параллельны между собой, но не совпадали, то пришлось бы построить дополнительную проекцию на плоскость, параллельную плоскости круговых сечений. При этом необходимо учесть расстояние между плоскостями симметрии. Этот прием является общим для поверхностей с одинаково направленными круговыми сечениями.

Аналогичным образом решены частные случаи задачи на пересечение поверхностей эллиптического параболоида и эллиптического конуса (фиг. 8, б), эллиптического конуса и конуса вращения (фиг. 8, в), параболоида и конуса вращения (фиг. 8, г). Во всех этих случаях обе пересекающиеся поверхности имеют одинаково направленные круговые сечения. В первых двух примерах обе поверхности второго порядка, имеющие две системы круговых сечений, в третьем — одной поверхностью является поверхность вращения, в четвертом — обе поверхности являются поверхностями вращения. В случае поверхности вращения второго порядка имеем две системы совпавших круговых сечений.

Задача упрощается, если одной из поверхностей второго порядка будет сферическая поверхность. Параллельно плоскостям круговых сечений поверхности, которая пересекается со сферой, проводим плоскость-посредник. При этом обе поверхности пересекутся по окружностям, так как каждое плоское сечение сферической поверхности есть окружность. Итак, эта задача сводится к случаю пересечения поверхностей с одинаково направленными круговыми сечениями.

Ранее описанным приемом решены задачи на пересечение поверхностей трехосного эллипсоида, эллиптического конуса и тора со сферической поверхностью (фиг. 9, а, б, в). Считаем, что для сферической поверхности каждая плоскость, проходящая через ее центр, является плоскостью омбилических диаметров. В первом и третьем примерах поверхности имеют общую плоскость омбилических диаметров, во втором примере плоскости омбилических диаметров не совпадают, они параллельны Π_2. Причем для сферы они ближе к фронтальной плоскости проекций на величину a (рис. 9, б). Точки B и C линии пересечения поверхностей сферы и эллиптического конуса построены следующим образом. Плоскость-посредник Σ пересекает поверхности по окружностям m и n. На окружности n диаметр i, который является фронталью, выбран за ось вращения. Плоскость Σ вращением вокруг этой оси совмещается с фронтальной плоскостью уровня. При этом преобразованные фронтальные проекции окружностей $\bar{m}_2$ и $\bar{n}_2$ будут проецироваться без искажений и их центры $\bar{1}_2$ и $\bar{2}_2$ смещены на величину a. Пересечение этих окружностей дает вспомогательные проекции $\bar{B}_2$ и $\bar{C}_2$ точек B и C. Обратным вращением находим фронтальные проекции B_2 и C_2 искомых точек линии пересечения. Аналогично строятся остальные точки линии пересечения. Точки D и E на очерковой образующей l конуса построены с помощью плоскости-посредника, за которую принята плоскость омбилических диаметров эллиптического конуса. Эта плоскость, проходящая через l, пересекает сферическую поверхность по окружности κ, которая смещена от плоскости окружности главного меридионального сечения на величину a. Проекция κ_2 окружности κ на плоскости Π_2 проецируется без искажения. Центр ее O_2, радиус равен величине R. Пересечение κ_2 и l_2 дает фронтальные проекции искомых точек; $D_2 = \kappa_2 \times l_2$ и $E_2 = \kappa_2 \times l_2$.

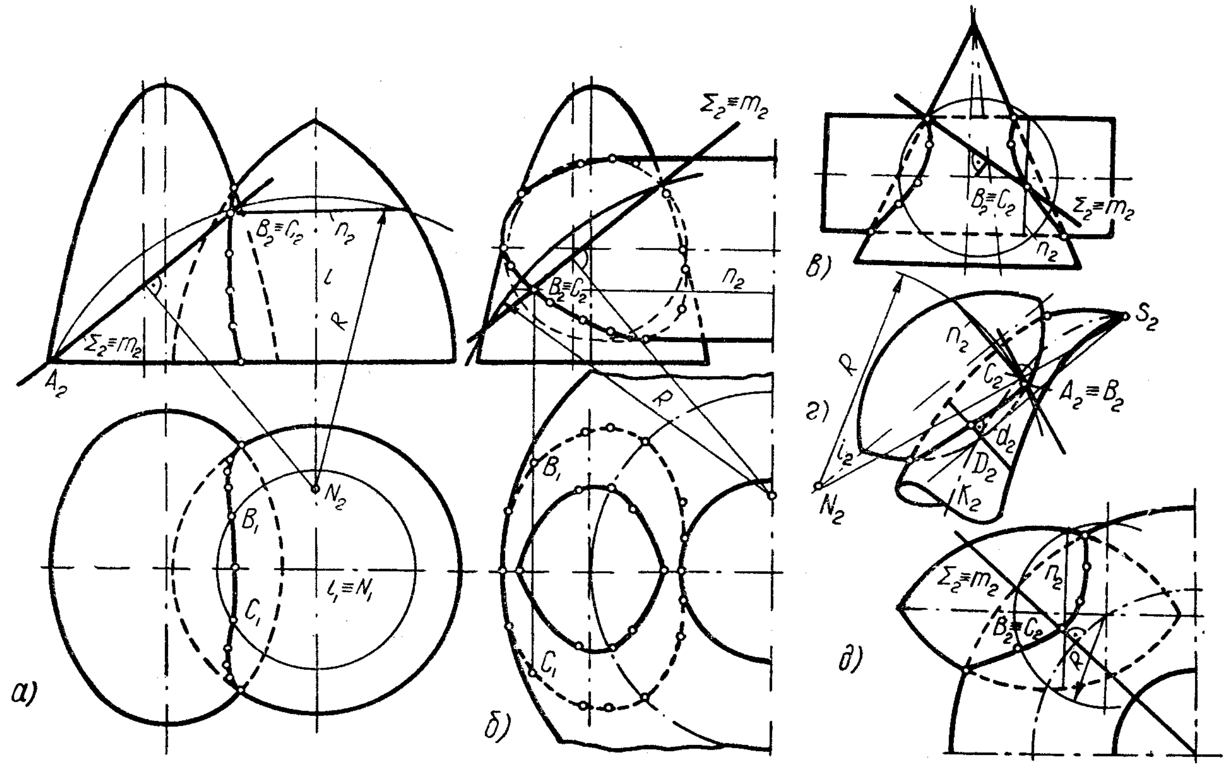


Фиг. 9.

Таким образом, перечисленные случаи пересечения двух поверхностей могут быть отнесены к одному типу задач — с одинаково направленными круговыми сечениями — и решены общим приемом — с помощью проецирующих плоскостей-посредников.

Пример 10. Заданы поверхности эллиптического параболоида и тора (фиг. 10, а). Требуется построить линию их пересечения. Плоскость омбилических диаметров эллиптического параболоида является плоскостью симметрии обеих поверхностей. Используем известный прием эксцентрических шаровых посредников. Восстановим из центра кругового сечения m $m_2 \equiv \Sigma$ поверхности эллиптического параболоида перпендикуляр до пересечения с осью i тора в точке N. Из этой точки, как из центра, проведем сферическую поверхность-посредник, у которого радиус $R = A_2N_2$. Сферическая поверхность пересекает поверхность эллиптического параболоида по окружности m, а поверхность тора — по окружности n. кружности m и n, как принадлежащие одной сферической поверхности, пересекутся в двух искомых точках B и C ($B_2 \equiv C_2$). Подобным образом строятся и остальные точки линии пересечения.

Аналогично решены задачи на пересечение поверхностей: эллиптического параболоида и кольца (фиг. 10, б), эллиптического конуса и


а)
б)
в)
г)
д)
A_2
$\Sigma_2 \equiv m_2$
$B_2 \equiv C_2$
n_2
l
R
N_2
B_1
C_1
$l_1 \equiv N_1$
S_2
$A_2 \equiv B_2$
d_2
D_2
K_2
i_2

Фиг. 10.

цилиндра вращения (фиг. 10, в), «кривого конуса» [7, стр. 329] и тора (фиг. 10, г), кольца и тора (фиг. 10, д). В этих примерах пересекающиеся поверхности имеют общую фронтальную плоскость симметрии.

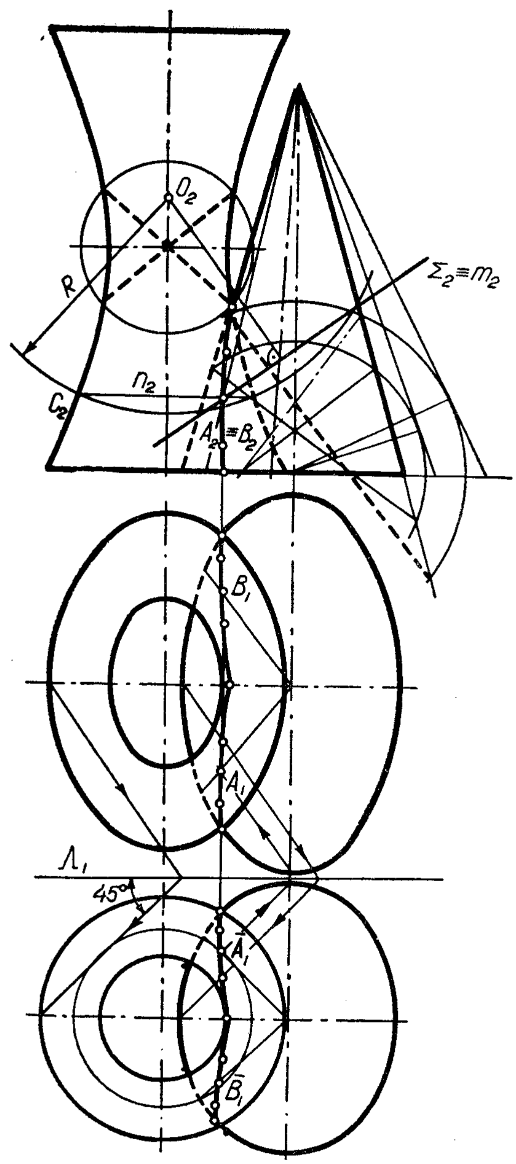
Остановимся на построении линии пересечения поверхностей «кривого конуса» и тора. Плоская кривая k есть геометрическое место центров круговых сечений (фиг. 10, г). Возьмем на этой кривой точку C и соединим с вершиной S. Плоскость Σ, проходящая через C и перпендикулярная SC, пересекает поверхность «кривого конуса» по окружности m ($m_2 \equiv \Sigma_2$). Прямая SC в пересечении с осью тора i дает нам центр N сферической поверхности-посредника. Эта сферическая поверхность пересекает поверхность тора по окружности n (n_2), а поверхность «кривого конуса» по окружности m (m_2). Пересечение n_2 и m_2 дает фронтальные проекции $A_2 \equiv B_2$ искомых точек A и B линии пересечения. Таким же образом строятся остальные точки линии пересечения. Если из точки S_2 провести луч, параллельный i_2, то получим круговое сечение a с центром D, плоскость которого будет параллельна плоскости круговых сечений тора. Если ось i будет проходить через вершину S, то точку S можно будет принять за центр концентрических сферических поверхостей, так как каждая сферическая поверхность, проведенная из центра S, пересекает поверхность «кривого конуса» по окружности [7].

Приведенный на фиг. 10 тип задач встречается в учебниках [7, 8, 9] и другой литературе по начертательной геометрии.

Пример 11. Заданы поверхности однополостного эллиптического гиперболоида и эллиптического конуса, линию пересечения которых следует построить. Плоскости омбилических диаметров обеих поверхностей совпадают и параллельны Π_2. Осуществим аффинное преобразование пространства таким образом, чтобы одна из поверхностей преобразовалась в поверхность вращения [4]. Тогда придем к частному случаю (фиг. 10) и, используя круговые сечения, решим задачу с помощью эксцентрических сферических поверхностей-посредников.

В нашем примере (фиг. 11) после преобразования получили поверхности однополостного гиперболоида вращения и эллиптического конуса. Построение точек A и B ($A_2 \equiv B_2$) ясно на чертеже. Остальные точки определены аналогично.

Так как за плоскость родства была взята фронтальная плоскость, то фронтальная проекция после преобразования не изменилась. Значит,



Фиг. 11.

фронтальные проекции линии пересечения до и после преобразования совпадают. По фронтальным проекциям легко определить горизонтальные проекции точек линии пересечения с помощью образующих конических поверхностей.

На преобразованной горизонтальной проекции линию пересечения в данном случае нет необходимости строить. Эта проекция по существу необходима лишь для определения направления семейств круговых сечений эллиптического конуса после преобразования.

Приведенный пример показывает, что с использованием круговых сечений может быть решена и задача на взаимное пересечение поверхностей второго порядка общего вида, плоскости омбилических диаметров которых совпадают.

Исследование показало, что использование круговых сечений упрощает решение перечисленных задач и позволяет подходить к их решению с общей точки зрения. Последнее положительно и с методической точки зрения. Хотя в работе рассмотрены не все возможные варианты, однако и они убеждают нас в целесообразности использования окружностных сечений при решении некоторых позиционных задач начертательной геометрии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Э. Э. Манашеров. О проведении касательных плоскостей к некоторым поверхностям. Тезисы докладов научно-технической конференции ТашИИТ, Ташкент, Изд. Ташк. инст. инж. жел.-дор. транспорта, 1963.
2. Э. Э. Манашеров. О проведении касательных плоскостей к некоторым поверхностям. Вопросы начертательной геометрии и инженерной графики. Труды ТашИИТ, вып. 39, Ташкент. Изд. ФАН Узб. ССР, 1966.
3. И. В. Цвицинский. Касательные плоскости к поверхностям второго порядка, имеющие семейства круговых сечений. Сб. «Прикладная геометрия и инженерная графика». Вып. 2, Киев, изд. «Будiвельник», 1966.
4. И. С. Джапаридзе. Геометрические преобразования пространства и их применения в начертательной геометрии. «Методы начертательной геометрии и ее приложения». Сборник статей под ред. Н. Ф. Четверухина. М., Гостехиздат, 1955.
5. В. В. Рыжков. Начертательная геометрия кривых линий и поверхностей. Вопросы современной начертательной геометрии. Сборник статей под ред. Н. Ф. Четверухина. М-Л., Гостехиздат, 1947.
6. И. В. Цвицинский. Гомологическое преобразование поверхностей второго порядка, имеющих семейства круговых сечений, и его применение. Вопросы теории и практики начертательной геометрии. Сборник статей Киевского инженерно-строительного института, Киев, 1960.
7. Н. А. Попов. Курс начертательной геометрии. М.-Л., Гостехиздат, 1947.
8. Н. Ф. Четверухин, В. С. Левицкий, З. И. Прянишникова, А. М. Тевлин, Г. И. Федотов. Курс начертательной геометрии. М.-Л., Гостехиздат, 1956.
9. Н. Н. Пшеничный, М. И. Репина, Л. И. Марченко. Начертательная геометрия. М., Изд. «Сов. наука», 1956.