

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Соболев С.Л. О формулах механических кубатур на поверхности сферы // Сибирский математический журнал. — 1962. — Т. 3. — № 5. — С. 769–791.
2. Coxeter H.S.M. The polytope 2_{21} , whose twenty seven vertices correspond to the lines on the general cubic surface // Amer. J. Math. — 1940. — V. 62. — № 3. — P. 457–486.
3. Todd J.A. Polytopes associated with the general cubic surface // J. London Math. Soc. — 1932. — V. 7. — № 27. — P. 200–205.
4. Мысовских И.П. Интерполяционные кубатурные формулы. — М.: Наука, 1981. — 336 с.
5. Coxeter H.S.M. The product of the generators of a finite group generated by reflections // Duke Math. J. — 1951. — V. 18. — P. 765–782.
6. Игнатенко В.Ф. Геометрия алгебраических поверхностей с симметриями // В сб.: Проблемы геометрии. — Т. 11 (Итоги науки и техники, ВИНТИ АН СССР). — М.: 1980. — С. 203–240.
7. Игнатенко В.Ф. Об инвариантах конечных групп, порожденных отражениями // Матем. сборник. — 1983. — Т. 120. — № 4. — С. 556–568.
8. Frame J.S. The classes and representations, of the groups of 27 lines and 28 bitangents // Annali di matematica. — 1951. — V. 32. — P. 83–119.
9. Игнатенко В.Ф. Алгебраические поверхности с группой симметрии многогранника 3_{21} // Украинский геометрический сборник. — 1980. — Вып. 23. — С. 50–56.

УДК 519.865

ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО И ОБРАТНОГО ГАУССОВСКОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Е.В. Истигечева

Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники
E-mail: ievne@mail.ru

Рассматриваются гиперболическое и обратное гауссовское распределения из класса обобщенных гиперболических распределений для описания финансовых временных рядов. Предлагается алгоритм оценивания параметров этих распределений с помощью метода максимального правдоподобия. Апробация алгоритма проведена на примерах эмпирических финансовых временных рядов.

Введение

Известно, что возвраты большинства финансовых активов являются лептокуртическими, т. е. функция плотности более вытянута в области среднего значения и имеет более тяжелые хвосты, чем у нормального распределения [1]. Неудовлетворительные результаты прогнозирования, полученные при условии нормальности распределения возвратов, заставляют искать новые распределения и разрабатывать подходы для обработки эмпирических финансовых данных. Так, Mandelbrot предложил использовать устойчивые законы Парето или α -устойчивые законы для описания финансовых временных рядов [2]. В работах [3, 4] для этих целей было использовано обобщенное t -распределение Стюдента, в [5] — распределение Лапласа. В 1977 г. Barndorff-Nielsen [6] описал класс обобщенных гиперболических распределений (*Generalized Hyperbolic* — GH), который стал очень популярным в областях теоретической и практической статистики. GH-распределение активно использовалось в физике, биологии и агрономии, а в 1995 г. Eberlein и Keller впервые применили его в финансах [7]. Указанное распределение имеет ряд свойств, которые являются привлекательными для описания финансовых временных рядов:

- GH-распределение позволяет учитывать асимметричность (известно, что функция плотности возвратов финансовых активов имеет асимметрию);

- хвосты GH-распределения тяжелее, чем у нормального распределения (возникновение редких событий, влияющих на форму и вид хвостов, соответствует получению наибольшей возможной прибыли или риску наибольшего вероятного убытка).

В статье рассматриваются распределения, которые являются подклассами обобщенного гиперболического распределения: гиперболическое распределение (*Hyperbolic HYP*) и обратное гауссовское распределение (*Normal Inverse Gaussian NIG*). Предлагается алгоритм оценивания параметров этих распределений с использованием метода максимального правдоподобия.

Постановка задачи

Функция плотности обобщенного гиперболического распределения имеет вид:

$$gh(x; \lambda, \mu, \alpha, \beta, \delta) = \frac{(\alpha^2 - \beta^2)^{\lambda/2}}{\sqrt{2\pi} \alpha^{\lambda-1/2} \delta^\lambda K_\lambda(\delta \sqrt{\alpha^2 - \beta^2})} (\delta^2 + (x - \mu^2))^{(\lambda-1/2)/2} \times \\ \times K_{\lambda-1/2}(\alpha \sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2}) \exp \beta(x - \mu),$$

где μ и δ — параметры положения и масштаба; β — асимметрии, α — устойчивости. Параметр $\lambda \in R$ характеризует определенный подкласс из семейства

обобщенных гиперболических распределений. Для $x \in R$ функция $K_\lambda(\cdot)$ определяется модифицированной функцией Бесселя третьего порядка с параметром λ

$$K_\lambda(x) = \frac{1}{2} \int_0^\infty y^{\lambda-1} \exp\left(-\frac{x}{2}\left(y + \frac{1}{y}\right)\right) dy, \quad x > 0$$

и следующими свойствами:

1. K_λ является симметричной относительно λ , т. е.

$$K_\lambda(x) = K_{-\lambda}(x).$$

2. Для $\lambda = \pm \frac{1}{2}$, имеем $K_{\pm \frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} x^{-\frac{1}{2}} e^{-x}$.

3. $K'_\lambda(x) = -\frac{\lambda}{x} K_\lambda(x) - K_{\lambda-1}(x)$.

4. $R_\lambda(x) = \frac{K_{\lambda+1}(x)}{K_\lambda(x)}$.

5. $(\log K_\lambda(x))' = \frac{\lambda}{x} - R_\lambda(x)$.

Так, параметр $\lambda=1$ приводит к гиперболическому распределению с плотностью:

$$\text{hyp}(x; \alpha, \beta, \delta, \mu) = \frac{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}{2\delta\alpha K_1(\delta\sqrt{\alpha^2 - \beta^2})} \times \\ \times \exp(-\alpha\sqrt{\delta^2 + (x-\mu)^2} + \beta(x-\mu)).$$

Соответственно, при $\lambda = -\frac{1}{2}$ получаем обратное гауссовское распределение с плотностью:

$$\text{nig}(x; \alpha, \beta, \delta, \mu) = \frac{\alpha\delta}{\pi} \frac{K_1\left(\alpha\delta\sqrt{1 + \left(\frac{x-\mu}{\delta}\right)^2}\right)}{\sqrt{\delta^2 + (x-\mu)^2}} \times \\ \times \exp(\delta\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} + \beta(x-\mu)).$$

Назначение параметров α и β для функции $gh(x, \lambda, \mu, \alpha, \beta, \delta)$ предлагается осуществлять с применением двух параметризаций [8]:

$$\beta = \frac{\zeta\tau}{\delta} \quad \text{и} \quad \alpha = \frac{\zeta\sqrt{1+\tau^2}}{\delta}.$$

Тогда функции плотности исследуемых распределений приобретают следующий вид:

$$\text{hyp}(x, \tau, \zeta, \delta, \mu) = \frac{1}{2\delta\sqrt{1+\tau^2}K_1(\zeta)} \times \\ \exp\left(-\zeta\left[\sqrt{1+\tau^2}\sqrt{1+\left(\frac{x-\mu}{\delta}\right)^2} - \tau\frac{x-\mu}{\delta}\right]\right)$$

и

$$\text{nig}(x, \tau, \zeta, \delta, \mu) = \frac{\zeta\sqrt{1+\tau^2}}{\pi} \times \\ \times \frac{K_1\left(\zeta\sqrt{1+\tau^2}\sqrt{1+\left(\frac{x-\mu}{\delta}\right)^2}\right)}{\sqrt{\delta^2 + (x-\mu)^2}} \exp\left(\zeta + \frac{\zeta\tau}{\delta}(x-\mu)\right).$$

Ставится задача оценивания четверки параметров $(\tau, \zeta, \delta, \mu)$ гиперболического и обратного гауссовского распределений с использованием метода максимального правдоподобия.

Оценивание параметров

Предположим, что $x_i, i=1, \dots, n$ – независимые наблюдения, тогда функции максимального правдоподобия для НГР и NIG-распределений имеют следующий вид:

$$L_1 = \sum_{i=1}^n \log(\text{hyp}(x_i, \tau, \zeta, \delta, \mu)),$$

$$L_2 = \sum_{i=1}^n \log(\text{nig}(x_i, \tau, \zeta, \delta, \mu)).$$

Поиск максимума осуществляется в соответствии с выполнением необходимого условия существования экстремума четырех переменных.

В случае гиперболического распределения:

$$\frac{dL_1}{d\tau} = \frac{\zeta}{\delta} \left(\sum_{i=1}^n (x_i - \mu) - \frac{\tau}{\sqrt{1+\tau^2}} \times \right. \\ \left. \times \sum_{i=1}^n \sqrt{\delta^2 + (x_i - \mu)^2} - \frac{n\tau\delta}{\zeta(1+\tau^2)} \right) = 0;$$

$$\frac{dL_1}{d\zeta} = \frac{1}{\delta} \left(-n\delta \left(\frac{1}{\zeta} - R_1(\zeta) - \sqrt{1+\tau^2} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \sum_{i=1}^n \sqrt{\delta^2 + (x_i - \mu)^2} + \tau \sum_{i=1}^n (x_i - \mu) \right) \right) = 0;$$

$$\frac{dL_1}{d\delta} = \frac{\zeta}{\delta^2} \left(\frac{-n\delta}{\zeta} + \sqrt{1+\tau^2} \times \right. \\ \left. \times \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \mu)^2}{\sqrt{\delta^2 + (x_i - \mu)^2}} - \tau \sum_{i=1}^n (x_i - \mu) \right) = 0;$$

$$\frac{dL_1}{d\mu} = \frac{\zeta}{\tau} \left(\sqrt{1+\tau^2} \sum_{i=1}^n \frac{x_i - \mu}{\sqrt{\delta^2 + (x_i - \mu)^2}} - n\tau \right) = 0.$$

Соответственно, для обратного гауссовского распределения:

$$\frac{dL_2}{d\tau} = \frac{2n\pi}{1+\tau^2} - \frac{\tau\zeta}{\sqrt{1+\tau^2}} \times \\ \times \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + \left(\frac{x_i - \mu}{\delta}\right)^2} R_1(a_i) + \frac{\zeta}{\delta} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu) = 0;$$

$$\frac{dL_2}{d\zeta} = n \left(1 + \frac{2}{\zeta} \right) - \sqrt{1+\tau^2} \times \\ \times \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + \left(\frac{x_i - \mu}{\delta}\right)^2} R_1(a_i) + \frac{\tau}{\delta} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu) = 0;$$

$$\frac{dL_2}{d\delta} = \frac{-n}{\delta} + \frac{\zeta\sqrt{1+\tau^2}}{\delta^3} \times \\ \times \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \mu)^2}{\sqrt{1 + \left(\frac{x_i - \mu}{\delta}\right)^2}} R_1(a_i) - \frac{\tau\zeta}{\delta^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu) = 0;$$

$$\frac{dL_2}{d\mu} = \frac{-n\zeta\tau}{\delta} + \frac{\zeta\sqrt{1+\tau^2}}{\delta^2} \sum_{i=1}^n \frac{x_i - \mu}{\sqrt{1 + \left(\frac{x_i - \mu}{\delta}\right)^2}} R_1(a_i) = 0,$$

$$\text{где } a_i = \zeta\sqrt{1+\tau^2} \sqrt{1 + \left(\frac{x_i - \mu}{\delta}\right)^2}.$$

Алгоритмы решений двух указанных систем нелинейных уравнений относительно неизвестных параметров $(\tau, \zeta, \delta, \mu)$ в предположении единственности экстремума осуществляются на базе рекуррентных процедур методом наискорейшего спуска, сопряженных градиентов и т. п.

Для NIG-распределения в качестве начальных значений искомых параметров используются решения, определяемые следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} E(X) &= \mu + \delta\tau; \\ V(X) &= \frac{\delta^2(1+\tau^2)}{\zeta}; \\ S(X) &= 3\frac{\tau}{\sqrt{\zeta}\sqrt{1+\tau^2}}; \\ K(X) &= \frac{3}{\zeta} \left(1 + 4\frac{\tau^2}{1+\tau^2} \right). \end{aligned}$$

Здесь $E(X)$ – математическое ожидание выборки, $V(X)$ – дисперсия, $S(X)$ – коэффициент асимметрии, $K(X)$ – куртозис. Решение этой системы уравнений приведет к нахождению параметров $(\tau, \zeta, \delta, \mu)$, которые могут быть использованы в качестве начальных значений для оценивания параметров гиперболического и обратного гауссовского распределений.

Соответственно, для НУР-распределения в качестве начальных значений используются данные HyperbolicDist R-packages [9].

Эконометрических анализ данных

В работе используются данные по валютным парам EUR/USD, GBP/USD, USD/JPY, USD/CHF за период с 03.01.2004 по 29.09.2006 г. (всего 455 значений) в качестве эмпирических временных рядов для оценивания параметров НУР- и NIG-распределений. Данные состоят из дневных цен закрытия, из которых формируются логарифмические

возвраты, т. е. $\ln \frac{S_n}{S_{n-1}}$, где S_n – значение котировки валютной пары в день n .

В табл. 1 сведены основные статистические характеристики по всем валютным парам, в табл. 2 показаны оценки параметров для НУР- и NIG-распределений.

Таблица 1. Основные статистические характеристики

Котировки валют	$M(X)$	$V(X)$	$S(X)$	$K(X)$
EUR/USD	-0,0001	0,000029	0,21673	0,09510
GBP/USD	-0,00002	0,000025	0,23685	0,03847
USD/JPY	0,00031	0,000028	-0,43221	1,03296
USD/CHF	0,00019	0,000035	-0,36500	0,22951

Таблица 2. Оценки параметров для НУР и NIG-распределений

Котировки валют	Параметры			
	τ	ζ	δ	μ
НУР-распределение				
EUR/USD	0,34582	20,54527	0,02205	-0,00832
GBP/USD	3,66805	16,96968	0,12459	-0,06550
USD/JPY	-0,28113	5,81484	0,01085	0,00417
USD/CHF	-0,43780	9,93258	0,01571	0,00813
NIG-распределение				
EUR/USD	0,07070	7,07653	0,01420	-0,00114
GBP/USD	5,25364	10,64734	0,12843	-0,04730
USD/JPY	-0,20705	4,60074	0,01119	0,00277
USD/CHF	-0,28605	2,11668	0,01644	0,01459

Из табл. 1 видно, что распределение логарифмических возвратов эмпирических данных характеризуется асимметрией, наличием куртозиса и не может быть описано распределением Гаусса. Используя оценки параметров из табл. 2, можно построить гиперболическое или обратное гауссовское распределения, позволяющие наиболее адекватно описать эмпирические финансовые данные.

Выводы

Рассмотрены гиперболическое и обратное гауссовское распределения из класса обобщенных гиперболических распределений и предложен алгоритм оценивания параметров этих распределений с помощью метода максимального правдоподобия. Полученные оценки параметров используются для описания финансовых временных рядов и построения адекватных математических моделей. Алгоритм успешно апробирован на эмпирических данных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Mandelbrot B. The variation of certain speculative prices // Journal of Business. – 1963. – V. 36. – P. 394–419.
2. Гамровски Б., Рачев С. Финансовые модели, использующие устойчивые законы // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 1995. – Т. 2. – Вып. 4. – С. 556–604.
3. Bollerslev T. A conditionally heteroscedastic time series model for speculative prices and rates of return // Review of Economics and Statistics. – 1987. – V. 69. – P. 542–547.
4. Wagner N., Marsh T. Measuring tail thickness under GARCH and

- an application to extreme exchange rate changes // Journal of Empirical Finance. – 2005. – V. 12. – P. 165–185.
5. <http://taylorandfrancis.metapress.com>
6. Barndorff-Nielsen O. E. Exponentially decreasing distributions for the logarithm of particle size // Proc. of the Royal Society London. – 1977. – V. A353. – P. 401–419.
7. Eberlein E., Keller U. Hyperbolic distributions in finance // Bernoulli. – 1995. – V. 1. – P. 281–299.
8. <http://cran.r-project.org>
9. <http://interstat.statjournals.net>