ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ
И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА им. С. М. КИРОВА

Том 266 1976

НЕКОТОРЫЕ ПРЕДЕЛЬНЫЕ ИНФОРМАЦИОННЫЕ СООТНОШЕНИЯ В ЗАДАЧАХ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ И РЕГРЕССИИ

Р. Н. ЛЮБЛИНСКИЙ

(Представлена научным семинаром кафедры автоматики и телемеханики)

При оперативном управлении сложными производственными комплексами возникают задачи прогноза состояния отдельных объектов на будущие моменты времени, регрессионной оценки текущих и будущих значений параметров объектов по наблюдениям за другими параметрами и объектами и индивидуального прогнозирования постепенных отказов оборудования. При управлении процессами развития прогнозирование является одним из необходимых элементов принятия решения [1].

В настоящее время существует большое количество работ по синтезу оптимальных операторов прогнозирования и регрессии для различных ситуаций, а именно: для стационарных и нестационарных полезного сигнала $x(t)$ и помехи $f(t)$; для процессов $x(t)$ и $f(t)$ с различными законами распределения; для дискретных и непрерывных наблюдений процессов $x(t)$; при различном характере искажений, вносимых при измерениях и т. д. [2]. Методы прогнозирования и регрессии по априорной информации, используемой для прогноза и по степени связи этой информации с оцениваемыми векторами состояния z можно разделить на две группы: а) методы, основанные на объективных моделях развития прогнозируемого явления; б) методы получения оценок путем определенных систем опроса специалистов, так называемые экспертные оценки.

Наибольшее растространение получили методы прогнозирования, основанные на вероятностной математической модели развития прогнозируемого явления. К ним относятся методы, основанные на распознавании образов, статистическом моделировании, решении диффузионных уравнений, методы учреждающей фильтрации типа фильтров Н. Винера, Р. Калмэна и методы получения регрессионных оценок. Важным вопросом при получении регрессионных и прогнозирующих оценок является анализ их достоверности и условий, при которых достоверность будет максимальной.

В настоящей работе получены предельные информационные оценки достоверности дискретных операторов предсказания и регрессии в самом общем виде, т. е. без ограничений на характер исходного процесса и на характер искажений, вносимых измерителем.

Выполнение прогнозирующих и регрессионных оценок на основе вероятностной динамической модели поясняется следующей структурной схемой (рис. 1).

$\bar{X}$ отрезок реализации процессов развития прогнозируемого явления, используемый для получения оценок, y — данные контроля процессов $\bar{x}$; f — возмущающие процессы, обусловливающие ошибки измерения; z — оцениваемый вектор состояния; ε — вектор ошибки оценки состояния; W — оператор выполнения оценки.

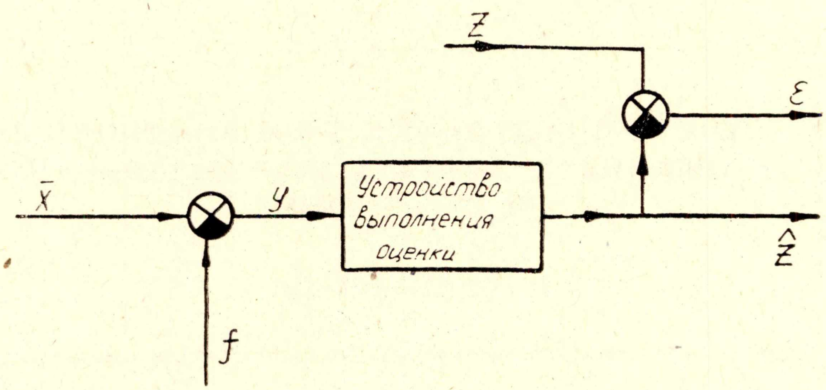

Рис. 1

Оцениваемый вектор состояния z соответственно представляет собой:

а) при прогнозирующей оценке состояния объекта на будущий момент времени по его предыстории, заданной наблюдениями векторного процесса $x(t)$ на интервале времени $(t_{к-m}, t_к)$

$$z = x(t_к + T),$$

где T — интервал времени предсказания;

б) при регрессионной оценке векторного процесса $N(t)$ по данным наблюдения $\bar{y}$ за значениями другого векторного процесса $x(t)$

$$z = N(t) = \varphi(\bar{x});$$

в) при индивидуальном прогнозировании постепенных отказов по данным наблюдения $\bar{y}$ за процессами $x(t)$, приводящими к отказам

$$z = t_{отк},$$

где $t_{отк}$ — момент времени первого выхода векторного процесса $x(t)$ за пределы допустимых значений. Вектор ошибки $\varepsilon(t)$ образуется путем сравнения оценки вектора $\hat{z}$, полученной воздействием оператора W реального устройства на данные контроля $\bar{y}$, с вектором z, представляющим идеальную оценку, т. е.

$$\varepsilon = z - \hat{z}. \quad (1)$$

Величина среднего уменьшения энтропии при выполнении оценки, т. е. среднее количество информации (СКИ), получаемой при этом, определяется следующим выражением:

$$I_0 = H(z) - H(\varepsilon), \quad (2)$$

где $H(z)$ — априорная энтропия вектора z; $H(\varepsilon)$ — энтропия вектора ошибки ε.

Существующие методы синтеза оптимального оператора W в подавляющем большинстве основаны на минимизации среднего квадрата (дисперсии) ошибки σ_ε^2 или функции различных моментов закона распределения ошибки [2]. Существует, однако, ряд работ, в которых в качестве минимизируемого критерия оптимальности фильтрации рассматривается энтропия вектора ошибки $H(\varepsilon)$ [5, 6].

Рассмотрим энтропию $H(\varepsilon)$ в качестве критерия оптимальности. Из выражения (2) следует, что минимизация величины $H(\varepsilon)$ равносильна максимизации величины I_0. Исследуем предельные свойства величины I_0. При этом воспользуемся предельными соотношениями для каналов связи и для оценки параметров законов распределения [4, 5].

Теорема 1. Среднее количество информации I_0, получаемой при выполнении прогнозирующей или регрессионной оценки состояния объекта, ограничено сверху величиной среднего количества информации $I(\bar{y}\to z)$ о векторе оценки z, содержащейся в данных контроля $\bar{y}$ процесса $\bar{x}$, используемых для оценки, т. е. $I_0 \leqslant I(y\to z)$.

Доказательство. Величина I_0 определяется выражением (2). Преобразуем это выражение таким образом, чтобы получить в правой части величину $I(\bar{y}\to z)$:

$$I_0 = H(z) - H(\varepsilon) = H(z) - H(z/\bar{y}) + H(z/\bar{y}) - H(\varepsilon), \tag{3}$$

где $H(z/\bar{y})$ — условная энтропия вектора z при наличии данных контроля $\bar{y}$.

Так как $H(z) - H(z/\bar{y}) = I(\bar{y}\to z)$,
то уравнение (3) преобразуется к виду

$$I_0 = I(\bar{y}\to z) + H(z/\bar{y}) - H(\varepsilon). \tag{4}$$

Величина $\hat{z}$ в соответствии с оператором W однозначно определяется по данным контроля $\bar{y}$. Следовательно, для плотностей распределения вероятностей вектора z и процесса $\bar{y}$ должно выполняться следующее:

$$f(z/\bar{y}) = f[\varepsilon + \hat{z}/\bar{y}] = f(\varepsilon/y).$$

Отсюда следует

$$H(z/\bar{y}) = H(\varepsilon/\bar{y}). \tag{5}$$

Следовательно,

$$H(z/\bar{y}) - H(\varepsilon) = H(\varepsilon/\bar{y}) - H(\varepsilon) = -I(\bar{y}\to\varepsilon), \tag{6}$$

где $H(\varepsilon/\bar{y})$ — условная энтропия вектора ε; $I(\bar{y}\to\varepsilon)$ — СКИ о векторе ε, содержащейся в данных контроля $\bar{y}$.

Из выражений (4) и (6) следует, что

$$I_0 = I(\bar{y}\to z) - I(\bar{y}\to\varepsilon). \tag{7}$$

В силу свойства неотрицательности количества информации

$$I(\bar{y}\to\varepsilon) \geqslant 0,$$

а следовательно,

$$I_0 \leqslant I(\bar{y}\to z).$$

Величина СКИ I_0 совпадает со своим верхним пределом $I(\bar{y}\to z)$, если $I(\bar{y}\to\varepsilon) = 0$, т. е. при статистической независимости вектора ошибки ε и процесса $\bar{y}$, что свидетельствует о полном извлечении интересующей нас информации из данных $\bar{y}$.

Так как всегда выполняется

$$I(\bar{y}\to z) < H(z),$$

то существует остаточная энтропия

$$H_0 = H(z) - I(\bar{y}\to z),$$

которая является нижним пределом уменьшения энтропии при выполнении оценки. Вследствие этого вектор ошибки ε может быть представлен в виде суммы двух составляющих: $\varepsilon_{н}$, обусловленной случайностью вектора z, и ε_y, обусловленной ошибками метода оценки. Совершенствование оператора оценки приводит к уменьшению составляющей ε_y. Идеалом оценки является оператор, для которого $\varepsilon_y = 0$.

Следствие. Среднее количество информации I_0, получаемой выполнением прогнозирующей или регрессионной оценок, при идеальных условиях измерения не превышает среднее количество информации $I(\overline{x} \to z)$ вектора оценки z, содержащейся в процессах $\overline{x}$, используемых для оценки, т. е.

$$I_0 \leqslant I(\overline{x} \to z).$$

Доказательство. При измерениях на процесс $x(t)$ налагаются погрешности, обусловленные влиянием окружающей среды и свойствами измерительных приборов. Поэтому идеальным измерительным устройством является такое, в котором измеряемый процесс без искажений передается на выход устройства, т. е. $\overline{y} = \overline{x}$, и тогда структурная схема (рис. 1) преобразуется к следующему виду (рис. 2).

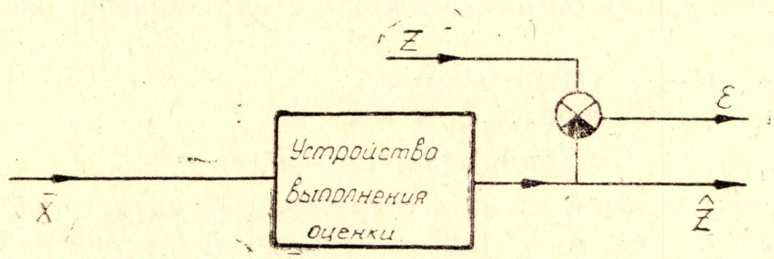

Рис. 2

В соответствии с теоремой 1 в этом случае $I_0 \leqslant I(\overline{x} \to \overline{z})$. Следовательно, максимальное уменьшение энтропии при идеальном измерительном устройстве и идеальном операторе выполнения оценки не превышает величины СКИ $I(x \to z)$.

Теорема 2. Оптимизация оператора W по критерию максимума СКИ, получаемой при оценке, эквивалентна минимизации величины взаимной информации $I(\overline{y} \to \varepsilon)$ между данными контроля $\overline{y}$, используемыми для оценки, и вектором ошибки ε.

Доказательство. Из выражения (7)

$$I_0 = I(\overline{y} \to z) - I(\overline{y} \to \varepsilon).$$

Величина $I(\overline{y} \to z)$ определяется взаимосвязью процесса $\overline{y}$ и вектора z и от свойств оператора W не зависит. Следовательно, максимизация величины I_0 соответствующим выбором оператора W эквивалентна минимизации величины $I(\overline{y} \to \varepsilon)$.

Теорема и следствие определяют предельные значения среднего количества информации, получаемой при выполнении прогнозирующих или регрессионных оценок. Очевидно, что эти предельные значения величины I_0 будут получены при синтезе оператора W оптимальным по критерию минимума энтропии $H(\varepsilon)$. Для нормального распределения вероятностей вектора ε значение I_0, полученное при оптимизации оператора W по критерию минимума дисперсии каждой координаты вектора ε, совпадает с предельным значением $I(\overline{y} \to z)$, т. е. такая оптимизация эквивалентна оптимизации по критерию минимума энтропии. Величина $H(z)$ определяется по следующему выражению

$$H(z) = -\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(z) \log f(z)\, dz, \tag{8}$$

где $f(z)$ — многомерная плотность распределения координат z.

Для непрерывных во времени процессов $\bar{x}$ и $\bar{y}$ величины $I(\bar{y} \to \bar{z})$ и $I(\bar{x} \to z)$ определяются как Supremum многомерной интегральной зависимости. Поэтому для упрощения расчетных формул можно квантовать во времени процессы $\bar{x}$ и $\bar{y}$ и рассматривать их как последовательности случайных величин. Даже при выполнении условий теоремы В. А. Котельникова такое рассмотрение является приближением вследствие конечности рассматриваемого интервала времени $(t_{к-m} \div t_к)$. Однако такое приближение допустимо. Кроме того, контроль процесса $x(t)$ на практике чаще всего осуществляется дискретно. Если рассматривать процесс $\bar{y}$ как дискретную последовательность случайных векторов, то выражение $I(\bar{y} \to z)$ имеет вид

$$I(\bar{y} \to z) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(\bar{y}, z) \log \frac{f(\bar{y}) \cdot f(z)}{f(\bar{y}, z)} d\bar{y} \cdot dz, \qquad (9)$$

где $f(\bar{y}, z)$ — многомерная совместная плотность вероятностей случайной последовательности $\bar{y}$, рассматриваемой в моменты времени $t_{к-m}$, $t_{к-m+1}$, ..., $t_к$, и вектора z; $f(\bar{y})$ — многомерная плотность распределения случайной последовательности $\bar{y}$.

Выражения (8) и (9) можно существенно упростить, заменив их приближенными выражениями, основанными на корреляционных матрицах последовательности $\bar{y}$ и вектора z

$$H(z) \approx \frac{1}{2} \log_2 (2\pi l)^n \det A, \qquad (10)$$

где $A = \| R_{z_i} \cdot z_j \|$, $i, j = \overline{1, n}$; $R_{z_i z_j}$ — момент взаимной корреляции координат z_i и z_j вектора z.

$$I(\bar{y} \to z) \approx \frac{1}{2} \log_2 \frac{\det A \cdot \det B}{\det C}, \qquad (11)$$

где B и C — матрицы корреляционной связи координат случайной последовательности y и вектора z [7]. Выражение (10) является точным для нормального закона распределения вероятностей вектора z.

Выражение (11) является точным для нормальных распределений вектора z и случайной последовательности векторов y. Для прочих распределений выражение (11) представляет собой несколько завышенную величину.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. В. Емельянов, Е. Б. Дудин, А. А. Малевич. Проблемы управления процессами развития производства, науки и техники и современные методы их исследования. В сб.: «Техническая кибернетика». 1968. Под ред. Б. Н. Петрова. М., 1970.
2. Н. И. Андреев. Корреляционная теория статистических оптимальных систем. М., «Наука», 1966.
3. К. Э. Шеннон. Математическая теория связи. В сб.: «Работы по теории информации и кибернетике». М., ИЛ, 1963.
4. H. L. Weideman and E. B. Stear. Entropy Analysis of Estimating Systems.— IEEE Transaction on Information Theory vol. 11—16, № 3, 1970.
5. Е. Г. Вошни. Критерии оптимизации в измерительной технике и технике регулирования с точки зрения теории информации. В сб.: «Проблемы электрометрии». Новосибирск, «Наука», 1967.
6. Б. Н. Петров, В. В. Петров и др. Начало информационной теории управления. В сб.: «Техническая кибернетика. 1968». Под ред. Б. Н. Петрова. М., 1970.
7. Р. Н. Люблинский. Информационный анализ состояния динамической системы. «Известия ЛЭТИ им. В. И. Ульянова (Ленина)», вып. 90, 1970.
8. Ю. В. Прохоров, Ю. А. Розанов. Теория вероятностей. Справочник. М., «Наука», 1967.

6. Заказ 6605.