ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ
И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА им. С. М. КИРОВА

Том 266 1976

ИССЛЕДОВАНИЕ ПЕРЕХОДНОГО ПРОЦЕССА В ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМАХ АВТОМАТИЧЕСКОГО ПОИСКА ЭКСТРЕМУМА

Н. Ф. ГАЛАШОВ

(Представлена научно-технической конференцией АВТФ)

Рассмотрим систему, осуществляющую автоматический поиск экстремума многопараметрической функции $x=F(\bar{v}_1,\ldots,\bar{v}_n)=F(v_n)$, где v_n обозначает n-мерный вектор с компонентами $v_1,\ldots,v_n$. Предположим, что пространство векторов $\bar{v}_n \in V_n$ является дискретным, а автоматический поиск может быть описан марковской цепью с вероятностями одноактовых переходов $p(\bar{v}_n, \bar{w}_n)$, $\bar{v}_n\bar{w}_n \in V_n$.

В качестве характеристики переходного процесса автоматического поиска экстремума может быть выбрано среднее время перехода системы из состояния $\bar{V}_n$ в состояние $\bar{w}_n - T(\bar{v}_n, \bar{w}_n)$. Такая характеристика для одномерного случая была рассмотрена, например, в работах [1, 2, 3, 4].

В многомерном случае дело значительно усложняется. Получение аналитического выражения для $T(\bar{v}_n, \bar{w}_n)$ в точном виде представляется практически невозможным даже для простейших экстремальных систем. Поэтому ниже предпринимается попытка нахождения верхней оценки для $T(\bar{v}_n, \bar{w}_n)$, которая является асимптотически точной при увеличении размерности системы автоматического поиска.

По определению

$$T(\bar{v}_n, \bar{w}_n) = \sum_{t=0}^{\infty} t p^1(\bar{v}_n, \bar{w}_n; t), \quad \bar{v}_n, \bar{w}_n \in V_n, \tag{1}$$

где t — дискретное время, $p^1(\bar{v}_n, \bar{w}_n, t)$ — обозначает вероятность перехода системы за t тактов из состояния $\bar{v}_n$ впервые в состояние $\bar{w}_n$.

Учитывая, что

$$p^1(\bar{v}_n, \bar{w}_n; t) = Q(\bar{v}_n, \bar{w}_n; t) - Q(\bar{v}_n, \bar{w}_n; t-1) =$$
$$= R(\bar{v}_n, \bar{w}_n; t-1) - R(\bar{v}_n, \bar{w}_n; t),$$

где $Q(\bar{v}_n, \bar{w}_n; t)$ — вероятность того, что в течение t тактов система хотя бы один раз побывает в состоянии $\bar{w}_n$, если в начальный момент она находилась в состоянии $\bar{v}_n$; $R(\bar{v}_n, \bar{w}_n; t)$ — вероятность противоположного события, можно для $T(\bar{v}_n, \bar{w}_n)$ получить следующее выражение:

$$T(\bar{v}_n, \bar{w}_n) = \sum_{t=0}^{\infty} R(\bar{v}_n, \bar{w}_n; t), \quad \bar{v}_n, \bar{w}_n \in V_n. \tag{2}$$

Функция $R(\bar{v}_n, \bar{w}_n;\ t)$ может быть записана в виде

$$R(\bar{v}_n, \bar{w}_n;\ t) = \prod_{s=1}^{t} [1 - \lambda(\bar{v}_n, \bar{w}_n;\ s)], \quad \bar{v}_n,\ \bar{w}_n \in V_n,$$

где $\lambda(\bar{v}_n, \bar{w}_n;\ t)$ — вероятность того, что в t-том такте система окажется в состоянии $\bar{w}_n$ при условии, что в течение $(t-1)$ предшествующих тактов она ни разу не побывала в этом состоянии.

После довольно сложных преобразований можно получить рекуррентное выражение для $\lambda(\bar{v}_n, \bar{w}_n;\ t)$ в следующем виде:

$$\lambda(\bar{v}_n, \bar{w}_n;\ t) = \frac{p(\bar{v}_n, \bar{w}_n;\ t) - \sum_{\kappa=1}^{t-1} p(\bar{v}_n, \bar{w}_n;\ t-\kappa)\,\lambda(\bar{w}_n, \bar{w}_n;\ \kappa) \prod_{i=0}^{\kappa} [1 - \lambda(\bar{w}_n, \bar{w}_n;\ i)]}{\prod_{\kappa=1}^{t-1} [1 - \lambda(\bar{v}_n, \bar{w}_n;\ \kappa)]}, \tag{3}$$

где $p(\bar{v}_n, \bar{w}_n;\ t)$ — вероятность перехода системы из состояния $\bar{v}_n$ в состояние $\bar{w}_n$ за t тактов.

Можно доказать следующее интересное утверждение:

$$\lim_{t \to \infty} \lambda(\bar{v}_n, \bar{w}_n;\ t) = \lambda(\bar{w}_n) = P(\bar{w}_n), \tag{4}$$

где $P(\bar{w}_n)$ — финальная вероятность состояния $\bar{w}_n \in V_n$.

Одним из основных показателей качества экстремальной системы является ее быстродействие, которое характеризуется средним временем поиска экстремального состояния $T_0(\bar{v}_n)$ ($\bar{v}_n$ — начальное состоя-

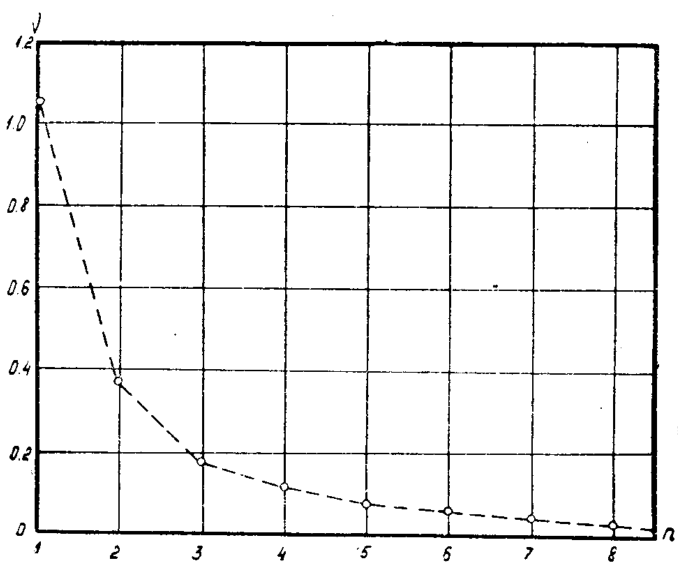

Рис. 1

ние, а в качестве экстремальной точки без ограничения общности можно принять $\bar{w}_n = (0,\ 0, \ldots, 0)$.

Можно убедиться, что если $\theta(\bar{v}_n)$ — время, в течение которого работа системы переходит в установившийся режим, то для $t > \bar{\theta}(v_n)$*

* Характеристики, помеченные индексом 0, соответствуют переходу в экстремальное состояние.

$$R_0(\bar{v}_n,\ t) \leqslant [1-\lambda_0]^{t-\Theta(\bar{v}_n)}.$$

λ_0 — установившееся значение $\lambda_0(\bar{v}_n)$. Поэтому справедливым является следующее неравенство:

$$T_0(\bar{v}_n) \leqslant \Theta(\bar{v}_n) + \frac{1}{\lambda_0},\quad \bar{v}_n \in V_n. \tag{5}$$

Таким образом, величина

$$\bar{T}_0(\bar{v}_n) = \Theta(\bar{v}_n) + \frac{1}{\lambda_0}$$

является верхней границей среднего времени поиска экстремума. Можно показать, что при $n \to \infty$, т. е. при увеличении размерности системы, величина $\nu = T_0(v_n)/T_0(v_n)$ асимптотически стремится к 1, причем скорость стремления к единице, по-видимому, тем больше, чем меньше зависимость между процессами поиска экстремума по каждой из координат. На рис. 1 изображена зависимость величины ν от размерности n для случая автономного поиска экстремума по каждой из координат.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Первозванский. О времени поиска в дискретных системах экстремального регулирования. Изв. АН СССР, «Энергетика и автоматика», № 5, 1960.
2. А. А. Фельдбаум. О влиянии случайных факторов на процесс автоматического поиска. Теория и применение дискретных автоматических систем. Тр. конференции. Изд-во АН СССР, 1960.
3. Б. А. Беседин, Г. А. Медведев. Быстродействие шаговых систем автоматического поиска, находящихся под действием случайных помех. «Техническая кибернетика», № 2, 1963.
4. Н. Ф. Галашов. Быстродействие шаговых систем автоматического поиска при наличии дрейфа экстремальной характеристики объекта управления. «Автоматика и телемеханика», № 1, 1969.