

**РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТИПОВЫХ СТРУКТУР  
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО УСТРОЙСТВА ПО БЛОКАМ  
УНИФИЦИРОВАННОГО НАБОРА**

В. К. ПОГРЕБНОЙ

(Представлена научно-техническим семинаром кафедры автоматизированных систем управления и лаборатории управления)

Необходимость в решении задачи распределения типовых структур по блокам унифицированного набора возникает при его практическом использовании в ходе проектирования вычислительных устройств [1]. Результатом решения задачи покрытия схемы вычислительного устройства блоками унифицированного набора является вектор  $X^* = \{x_1^*, x_2^*, \dots, x_j^*, \dots, x_n^*\}$ , ненулевые составляющие которого  $x_j^*$ ,  $j=1, 2, \dots, n'$ ;  $n' < n$  указывают на количество блоков  $j$ -го вида, необходимых для реализации рассматриваемой схемы. Количество типовых структур (ТС) данной схемы определяется вектором  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_r, b\}$ , где  $\omega$  — количество видов ТС в унифицированном наборе,  $b_r$  ( $r=1, 2, \dots, \omega$ ) — количество ТС  $r$ -го вида, содержащихся в рассматриваемой схеме. Совокупность ТС, содержащихся в блоках  $\{x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*\}$ , по виду и количеству, как правило, превышает множество ТС схемы либо совпадает с ним. Поэтому решение задачи распределения множества ТС схемы по блокам  $\{x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*\}$  без какой-либо оптимизации будет заключаться в простом установлении соответствия между конкретными ТС схемы и блоками, то есть распределения всех ТС схемы по блокам.

Если учесть, что ТС схемы связаны между собой, то возникает задача распределения ТС по блокам таким образом, чтобы суммарное число связей между блоками было минимальным. Минимизация суммарного числа межблочных связей, которые выполняются, как правило, навесным монтажом, существенно улучшает технические и экономические показатели проектируемого вычислительного устройства. Эта задача подобна задаче компоновки модулей в блоки по критерию минимума межблочных связей с той лишь существенной разницей, что произвольная совокупность модулей (в данном случае ТС), удовлетворяющая конструктивным параметрам блока, не может быть включена в него, если она не совпадает с априорно заданным «образом» блока. Такое весьма существенное отличие данной задачи не позволяет рассматривать ее как задачу разрезания графа на минимально связанные подграфы.

В настоящей работе предлагается математическая постановка и метод решения задачи распределения ТС по блокам по критерию минимума суммарного числа межблочных связей. Исходными данными к решению задачи распределения является множество блоков  $\{x_1^*, x_2^*$ ,

...,  $x_n^*$  } и множество ТС схемы  $\{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ . Информация о связях между ТС схемы представлена матрицей связности  $C = \|c_{kl}\|$ ,  $k=1, 2, \dots, s$ ,  $l=1, 2, \dots, s$ . Элементы матрицы  $c_{kl}$  характеризуют число связей между  $k$ -й и  $l$ -й ТС схемы. Матрица  $C$  является симметричной, а элементы  $c_{ll} = 0$ ,  $l=1, 2, \dots, s$ , где  $s$  — количество ТС в схеме.

Введем следующие обозначения:

$A_j^0$  — множество видов ТС, содержащихся в  $j$ -м блоке по одному разу;

$A_j$  — множество видов ТС, содержащихся в  $j$ -м блоке более одного раза;

$A_j = A_j^0 \cup A_j'$  — множество видов ТС, содержащихся в  $j$ -м блоке.

Таблица 1

$b_r$	$b_5=1$	$b_{12}=1$	$b_{20}=2$		$b_{18}=3$			$b_3=2$		$b_{13}=1$	$b_2=2$		$b_8=1$
Вид ТС	5	12	20	20	18	18	18	3	3	13	2	2	8
Порядковый номер ТС	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

Сформируем все возможные варианты компоновки ТС схемы в блок  $j$ -го вида. Процесс формирования вариантов покажем на примере распределения ТС по блокам для схемы, перечень ТС которой представлен в табл. 1, а ненулевые элементы матрицы связности — в табл. 2.

Таблица 2

$k \setminus l$	1-2	1-4	1-5	1-13	2-9	3-11	3-12
$c_{kl}$	10	3	2	15	7	5	18
$k \setminus l$	4-5	4-7	6-7	6-11	7-8	9-10	10-11
$c_{kl}$	10	20	4	17	10	14	12

Для реализации данной схемы используется 4 различных блока, каждый из которых содержит следующие совокупности ТС:  $A_1 = \{18, 20; 5; 12\}$ ;  $A_2 = \{20; 3; 8\}$ ;  $A_3 = \{2; 18; 18\}$ ;  $A_4 = \{3; 2; 13\}$ .

Варианты компоновки ТС схемы в  $j$ -й блок удобно представить деревом, каждая ветвь которого содержит множество  $M_{ij}$  вершин ТС схемы, образующее  $i$ -й вариант компоновки данного блока. Варианты компоновки ТС в каждый из четырех блоков рассматриваемого примера представлены на рис. 1.

Все вершины дерева вариантов блока расположены на уровнях, каждому из которых соответствует  $r$ -й вид ТС. Так, для 3-го варианта 1-го блока — множество вершин (номеров ТС)  $M_{3,1} = \{6, 3, 1, 2\}$ , что соответствует множеству ТС 1-го блока  $A_1 = \{18, 20, 5, 12\}$ . При формировании вариантов необходимо учитывать только те виды ТС блоков, которые встречаются в рассматриваемой схеме. Заметим также, что дерево вариантов строится для блоков всех видов, используемых при реализации схемы. Причем для блоков  $j$ -го вида с  $x_j^* > 1$  строится одно дерево вариантов. В принятых обозначениях нетрудно подсчитать число вариантов  $m_j$  при построении дерева для  $j$ -го блока. В случае, если все ТС в  $j$ -м блоке различны, то есть  $A_j = A_j^0$ , число вариантов можно определить по формуле

$$m_j = \prod_{r \in A_j^0} b_r, \quad \text{при } d_{rj} = 1, \quad \text{для всех } r \in A_j, \quad (1)$$

где  $d_{rj}$  — число ТС  $r$ -го вида в  $j$ -м блоке

В рассматриваемом примере к таким блокам относятся 1-й, 2-й и 4-й. Так, для 1-го блока  $m_1 = b_{18} \cdot b_{20} \cdot b_5 \cdot b_{12} = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 6$ . Для блоков, содержащих только одинаковые ТС, либо группы ТС нескольких видов, в каждой из которых более одной ТС, справедлива следующая формула

$$m_j = \prod_{r \in A_j'} C_{b_r}^{d_{rj}}, \quad \text{при } d_{rj} > 1, \quad \text{для всех } r \in A_j', \quad (2)$$

где  $C_{b_r}^{d_{rj}}$  — число сочетаний из  $b_2$  по  $d_{rj}$ .

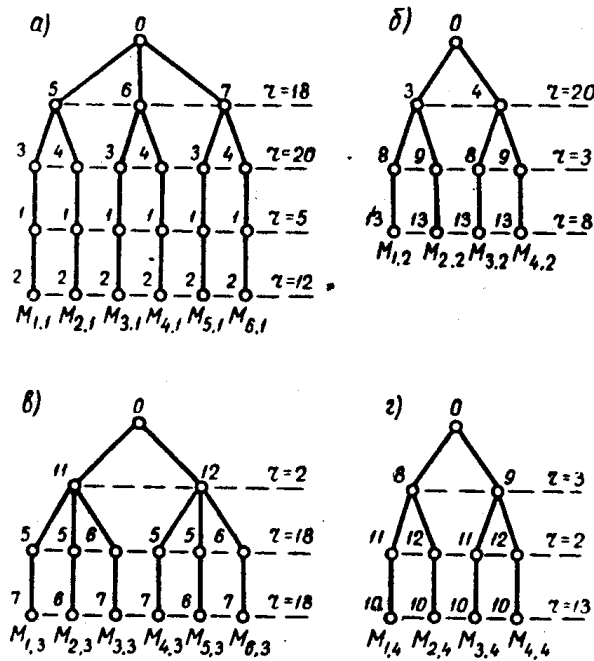


Рис. 1. а — варианты 1-го блока; б — варианты 2-го блока; в — варианты 3-го блока; г — варианты 4-го блока

Встречаются такие блоки, у которых  $A_j^0 \neq \emptyset$  и  $A_j' \neq \emptyset$ ,  $A_j = A_j^0 \cup A_j'$ . В этом случае число вариантов  $m_j$  определяется по формуле

$$m_j = \prod_{r \in A_j^0} b_r \cdot \prod_{r \in A_j'} C_{b_r}^{d_{rj}}, \quad \text{при } A_j^0 \neq \emptyset, \quad A_j' \neq \emptyset. \quad (3)$$

Так, для 3-го блока  $A_j^0 = \{2\}$ ;  $A_j' = \{18\}$ ;  $d_{18,3} = 2$ ;  $m_3 = b_2 \cdot C_{b_{18}}^{d_{18,3}} = 2 \cdot C_3^2 = 6$ .

Общее число вариантов по всем видам блоков равно

$$\sum_{j=1}^n m_j. \quad (4)$$

Каждому  $i$ -му варианту  $j$ -го блока можно поставить в соответствие величину  $c_{ij}$ , которая характеризует количество связей между ТС

$i$ -го варианта с множеством  $M_{ij}$ . Величина  $c_{ij}$  определяется по матрице связности  $C = \|c_{kl}\|_{s \times s}$  по формуле

$$c_{ij} = \sum_{k \in M_{ij}} \sum_{l \in M_{ij}} c_{kl} \quad (5)$$

Таким образом, каждый  $i$ -й вариант  $j$ -го блока имеет оценку  $c_{ij}$  — сумму внутренних связей между ТС множества  $M_{ij}$ . Очевидно, что для решения задачи распределение ТС по блокам по критерию минимума межблочных связей необходимо из всего множества вариантов компоновки блоков выбрать такую совокупность вариантов, которая содержит все ТС схемы и имеет максимальную сумму соответствующих оценок  $c_{ij}$ .

Введем переменную  $x_{ij}$ ,

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-й вариант } j\text{-го блока принят для реализации схемы;} \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

В принятых обозначениях задача распределения ТС по блокам по критерию минимума межблочных связей заключается в максимизации линейной формы

$P$ :

$$\max Z = \sum_{i=1}^{m_j} \sum_{j=1}^{n'} c_{ij} x_{ij}, \quad (6)$$

при

$$\sum_{i=1}^{m_j} \sum_{j=1}^{n'} a_{ijk} x_{ij} = 1, \quad k=1, 2, \dots, s, \quad (7)$$

$$\sum_{i=1}^{m_j} x_{ij} = x_j^*, \quad j=1, 2, \dots, n', \quad (8)$$

$$x_{ij} = 0, 1; \quad i=1, 2, \dots, m_j; \quad j=1, 2, \dots, n', \quad (9)$$

где  $s$  — количество ТС в схеме;

$$a_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{если } k\text{-я ТС содержится в } i\text{-м варианте } j\text{-го блока;} \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Условие (7) в данном случае означает, что множество вариантов, составляющих решение задачи (6) — (9), должно включать по одному разу все ТС схемы. Для случая когда некоторые ТС блоков при покрытии схемы окажутся избыточными, условие (7) должно быть записано в виде

$$\sum_{i=1}^{m_j} \sum_{j=1}^{n'} a_{ijk} x_{ij} \geq 1, \quad k=1, 2, \dots, s. \quad (7)$$

Условие (8) показывает, что среди множества вариантов  $j$ -го блока должно быть выбрано число вариантов, равное числу блоков  $j$ -го вида, полученных при покрытии схемы.

Если блоки, реализующие схему, встречаются по одному разу, то есть  $x_j^* = 1, j=1, 2, \dots, n'$ , то условие (8) принимает вид

$$\sum_{i=1}^{m_j} x_{ij} = 1, \quad j=1, 2, \dots, n'. \quad (8)$$

Задачу, полученную заменой условия (8) на (8)', назовем задачей  $P_1$ . Остановимся подробнее на условиях (7), (8)', (9) задачи  $P_1$ .

Наличие условия (8)' указывает, что среди множества вариантов  $j$ -го блока в решение задачи  $P_1$  должен войти только один вариант  $x_{ij}$ . Следовательно, условие (8)' разбивает все множество переменных задачи  $P_1$  на  $n'$  групп, каждая из которых соответствует вариантам  $j$ -го блока. Основное свойство группы заключается в том, что среди множества ее переменных только одна из них входит в решение задачи  $P_1$ .

Очевидно, что для решения задачи  $P_1$  достаточно просмотреть  $\prod_{j=1}^{n'} m_j$  вариантов и среди допустимых выбрать решение, соответствующее максимальному значению целевой функции. При решении задачи распределения ТС для больших схем величина  $\prod_{j=1}^{n'} m_j$  может достигнуть таких значений, что перебор всех вариантов решения окажется невозможным либо нерациональным.

Применительно к рассматриваемой задаче число переборов можно существенно сократить, если поиск оптимального решения осуществлять по схеме метода ветвей и границ. Предварительно покажем, что число переменных в задаче  $P_1$  в момент поиска оптимального решения можно значительно сократить.

Заменим условие (7)' задачи  $P_1$  на условие

$$\sum_{i=1}^{m_j} \sum_{j=1}^{n'} a_{ijk} x_{ij} \leq 1, \quad k=1, 2, \dots, s, \quad (7)''$$

а условие (8)' на условие

$$\sum_{i=1}^{m_j} x_{ij} \leq 1, \quad j=1, 2, \dots, n'. \quad (8)''$$

Для задачи  $P_2$ , полученной заменой условий (7)', (8)' на (7)'', (8)'', введем понятие частичного плана. Частичным планом  $R_h$  задачи  $P_2$  будем называть любой план, удовлетворяющий условиям задачи  $P_2$ , для которого справедливо

$$\sum_{i=1}^{m_p} x_{ip} = 1, \quad p=1, 2, \dots, h, \quad h < n'.$$

Очевидно, что значение целевой функции  $Z_1^*$ , соответствующее оптимальному плану задачи  $P_1$ , совпадает со значением целевой функции оптимального плана задачи  $P_2$ . Задача  $P_2$  вводится для конкретизации понятия частичного плана и удобства последующих рассуждений.

**Лемма 1.** Для любого частичного плана  $R_h$  задачи  $P_2$  в каждой  $t$ -й группе,  $t=h+1, h+2, \dots, n'$ , существует вариант  $x_{it}$ , при включении которого в частичный план  $R_h$  получается новый частичный план  $R_{h+1}$  задачи  $P_2$ .

**Доказательство.** Пусть имеется частичный план  $R_h$  задачи  $P_2$ , для которого справедливо

$$\sum_{i=1}^{m_p} x_{ip} = 1, \quad p=1, 2, \dots, h, \quad h < n'.$$

Выберем одну из групп множества  $\{h+1, h+2, \dots, n'\}$ , например  $t$ -ю. Каждый вариант  $x_{it}$   $t$ -й группы из множества  $m_t$  содержит множество  $A_t$  видов ТС  $t$ -го блока. Если множество  $A = \{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_p\} \cap A_t = \emptyset$ , то, очевидно, что любой вариант  $x_{it}$  множества  $m_t$  может быть включен в частичный план  $R_h$  без нарушения условий (7)'', (8)''.

Рассмотрим другой случай, когда множество  $A = \{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_p\} \cap A_t \neq \emptyset$ . Выделим в множестве  $A$  ТС  $g$ -го вида. Предположим, что ни один из вариантов  $x_{it}$ ,  $i=1, 2, \dots, m_t$  не может быть включен в частичный план  $R_h$  без нарушения  $k$ -го неравенства условия (7)". Предположим также, что  $k$ -я ТС схемы является ТС  $r$ -го вида. Заметим, что нарушение  $k$ -го неравенства условия (7)" возможно только в случае, если в вариантах частичного плана  $R_h$  содержатся ТС  $r$ -го вида в количестве  $b_r$ . Это означает, что реализация ТС  $r$ -го вида схемы может быть осуществлена без ТС  $r$ -го вида  $t$ -го блока, что противоречит исходному положению об отсутствии избыточности у блоков реализующих схему. Учитывая то обстоятельство, что множество вариантов  $t$ -й группы содержит все возможные варианты компоновки  $t$ -го блока, остается принять, что в  $t$ -й группе существует вариант  $x_{it}$ , который может быть включен в частичный план  $R_h$  без нарушения условий (7)", (8)" задачи  $P_2$ . Лемма 1 доказана.

В реальных задачах распределения ТС встречаются ситуации, когда для всех вариантов некоторой  $f$ -й группы  $c_{if} = c_f = \text{const}$ ,  $i=1, 2, \dots, m_f$ . Исключив из условий (7)", (8)" задачи  $P_2$  такие группы вариантов, получим задачу

$P_3$ :

$$\max Z = \sum_{i=1}^{m_v} \sum_{v=1}^{\theta} c_{iv} x_{iv}, \quad (10)$$

при

$$\sum_{i=1}^{m_v} \sum_{v=1}^{\theta} a_{ivk} x_{iv} \leq 1, \quad k=1, 2, \dots, s, \quad (11)$$

$$\sum_{i=1}^{m_v} x_{iv} \leq 1, \quad v=1, 2, \dots, \theta, \quad (12)$$

$$x_{iv} = 0, 1; \quad i=1, 2, \dots, m_v; \quad v=1, 2, \dots, \theta; \quad \theta < n', \quad (13)$$

где  $\theta$  — число групп задачи  $P_2$ , оставшихся после исключения.

Теорема 1. Пусть  $Z_3^*$  — значение целевой функции, соответствующее оптимальному плану задачи  $P_3$ , полученной из задачи  $P_2$  после исключения  $f$ -х групп с  $c_{if} = c_f = \text{const}$ ,  $f = \theta + 1, \theta + 2, \dots, n'$ . Тогда справедливо

$$Z_1^* = Z_3^* + \sum_{f=\theta+1}^{n'} c_f. \quad (14)$$

Доказательство. Так как в условиях задачи  $P_2$  исключены группы с  $c_{if} = c_f = \text{const}$ ,  $f = \theta + 1, \theta + 2, \dots, n'$ , то оптимальный план задачи  $P_3$  является частичным планом  $R_\theta$  задачи  $P_2$  с целевой функцией  $Z_3^*$ . Согласно лемме 1 в каждой исключенной группе существует вариант  $x_{if}$ ,  $i=1, 2, \dots, m_f$ ;  $f = \theta + 1, \theta + 2, \dots, n'$ , при включении которого в частичный план  $R_\theta$  получается новый частичный план  $R_{\theta+1}$ . Значение целевой функции нового частичного плана будет определяться суммой  $Z_3^* + c_f$ . После включения в частичный план  $R_\theta$  по одному варианту  $x_{if}$  от каждой исключенной  $f$ -й группы  $f = \theta + 1, \theta + 2, \dots, n'$  значение целевой функции полученного плана будет равно

$$Z_3^* + \sum_{f=\theta+1}^{n'} c_f.$$

Полученный план содержит по одному варианту из каждой группы задачи  $P_2$  и удовлетворяет ее условию (7)". Следовательно, такой план в условиях отсутствия избыточности у блоков удовлетворяет также и условиям задачи  $P_1$ . Очевидно, что найденный таким образом план является оптимальным для задачи  $P_2$  и так как значения целевых функций  $Z_2^*$  и  $Z_1^*$ , соответствующих оптимальным планам задач  $P_2$  и  $P_1$ , совпадают, следовательно, можно записать, что

$$Z_2^* = Z_3^* + \sum_{f=\theta+1}^{n'} c_f = Z_1^*.$$

Теорема 1 доказана.

При решении задачи  $P_1$  на этапе поиска оптимального частичного плана теорема 1 позволяет сократить размерность задачи на  $n' - \theta$  групп, что существенно облегчает ее решение. Использование теоремы 1 в таких целях возможно лишь при наличии в задаче  $P_1$  групп вариантов с оценками  $c_{ij} = \text{const}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m_j$ . Более существенное сокращение размерности при решении реальных задач может быть достигнуто за счет исключения из задачи  $P_1$  всех вариантов, для которых  $c_{ij} = 0$ . При исключении вариантов с нулевыми оценками необходимо рассматривать задачу  $P_2$ , так как нет гарантии в том, что для оставшихся вариантов можно получить решение, в котором будет присутствовать по одному варианту из всех групп, а условия (7)", (8)" не требуют получения именно такого решения. Исключим из условий (7)", (8)" переменные  $x_{ij}$ , для которых  $c_{ij} = 0$ , получим сокращенную задачу  $P_2$ .

Теорема 2. Пусть оптимальному плану сокращенной задачи  $P_2$  соответствует значение целевой функции  $Z_2^*$ , тогда справедливо

$$Z_1^* = Z_2^*. \quad (16)$$

Доказательство. В данном случае нас интересуют варианты с  $c_{ij} = 0$  только в тех группах, которые содержат также варианты с ненулевыми оценками. Группы, все варианты которых имеют оценки  $c_{ij} = 0$ , можно отнести к группам с постоянными оценками вариантов. Возможность исключения таких групп доказана теоремой 1.

В задаче  $P_2$  исключим из  $j$ -й группы  $j$ -й вариант с оценкой  $c_{ij} = 0$ . После решения полученной таким образом сокращенной задачи возможны две ситуации. Оптимальный план сокращенной задачи содержит вариант с ненулевой оценкой из  $j$ -й группы (случай 1) либо не содержит ни одного варианта из  $j$ -й группы (случай 2).

Если решить задачу  $P_2$ , не исключая вариант  $x_{ij}$  с нулевой оценкой, то также возможны два случая. Оптимальный план задачи  $P_2$  содержит вариант  $j$ -й группы с ненулевой оценкой (случай 1) либо содержит вариант  $x_{ij}$  с нулевой оценкой (случай 2). Если при решении задачи  $P_2$  имеет место первый случай, то, очевидно, что полученное при этом значение целевой функции  $Z_2^*$  не зависит от того, содержится вариант  $x_{ij}$  с нулевой оценкой в задаче  $P_2$  или нет. Следовательно, для первого случая решение сокращенной задачи  $P_2$  дает значение целевой функции  $Z_2^* = Z_2^{**}$ . Предположим далее, что при решении задачи  $P_2$  имеет место второй случай. Исключение из полученного при этом оптимального плана варианта  $x_{ij}$  с нулевой оценкой также не изменит значение целевой функции  $Z_2^*$ . При этом ни одно из условий (7)", (8)" не нарушится, так как эти условия не требуют наличия в оптимальном плане вариантов из всех групп. Следовательно, и для второго случая решение сокращенной задачи  $P_2$  не изменяет значение целевой функции

Таблица 3

$m_j$	$m_1=6$						$m_2=4$				$m_3=6$						$m_4=4$			
	$x_{1,1}$	$x_{2,1}$	$x_{3,1}$	$x_{4,1}$	$x_{5,1}$	$x_{6,1}^*$	$x_{1,2}^*$	$x_{2,2}$	$x_{3,2}$	$x_{4,2}$	$x_{1,3}$	$x_{2,3}^*$	$x_{3,3}$	$x_{4,3}$	$x_{5,3}$	$x_{6,3}$	$x_{1,4}$	$x_{2,4}$	$x_{3,4}$	$x_{4,4}^*$
1	1	1	1	1	1	1														
2	1	1	1	1	1	1	1													
3	1		1		1			1												
4		1		1					1											
5	1	1								1										
6			1			1					1									
7												1								
8							1													
9								1												
10									1											
11										1										
12											1									
13												1								
$j=1$	1	1	1	1	1	1														
2							1													
3								1												
4									1											
$c_j$	12	25	10	10	10	33	0	0	0	0	17	21	0	0	4	12	0	24	14	max
$x_j^1$	$x_1^1$	$x_2^1$	$x_9^1$	$x_{10}^1$	$x_{11}^1$	$x_1^1$	$x_5^3$	$x_4^3$	$x_{12}^3$	$x_8^4$	$x_3^4$	$x_6^4$								



$Z_2^{**}$ , полученное при решении задачи  $P_2$ . Подобные рассуждения можно распространить для всех других вариантов с нулевыми оценками.

Оптимальный план сокращенной задачи  $P_2$  является частичным планом. Поэтому для получения плана задачи  $P_1$  частичный план на основании леммы 1 может быть расширен за счет вариантов с нулевыми оценками. Значение целевой функции оптимального плана задачи  $P_2$  при этом не изменится и, следовательно, выражение (16) справедливо. Теорема 2 доказана.

Перед изложением алгоритма решения задачи  $P_1$  конкретизируем правило построения ветвей дерева, способ вычисления оценки для выбора ветви и процесс движения по вершинам дерева. Последующее изложение будем иллюстрировать на примере задачи распределения ТС, исходные данные к которой представлены в табл. 1 и 2. Условия задачи  $P_1$  для рассматриваемого примера представим в форме табл. 3

В табл. 3 представлены также оценки вариантов  $c_{ij}$ , которые определены по формуле (5) с использованием данных табл. 2.

При построении дерева варианты 2-й группы не используются, так как все они имеют оценки  $c_{ij} = \text{const}$ . В данном случае эти варианты могут быть исключены и как варианты с нулевыми оценками. Варианты  $x_{1,3}$ ,  $x_{4,3}$ ,  $x_{5,3}$ ,  $x_{2,4}$  в других группах, имеющие нулевые оценки, при построении дерева также исключаются из рассмотрения. Оставшимся вариантам с ненулевыми оценками поставим в соответствие переменные  $x_t^j$ ,  $t=1, 2, \dots, v$  (последняя строка табл. 3). Здесь  $v$  — число вариантов с ненулевыми оценками, а индекс  $j$  указывает на принадлежность  $t$ -го варианта  $j$ -й группе. Для удобства построения и организации обхода вершин дерева варианты по индексу  $t$  пронумерованы в порядке убывания значений их оценок. Построение дерева осуществляется таким образом, что каждая его вершина соответствует некоторой переменной  $x_t^j$  (исключение составляет нулевая вершина — корень дерева). Каждый маршрут с началом в нулевой вершине и концом в одной из вершин дерева содержит совокупность вершин  $x_t^j$ , которая является частичным планом задачи  $P_2$ . Если маршрут заканчивается в одной из висячих вершин дерева, то соответствующий частичный план не может быть расширен. На рис. 2 показано дерево частичных планов для рассматриваемого примера.

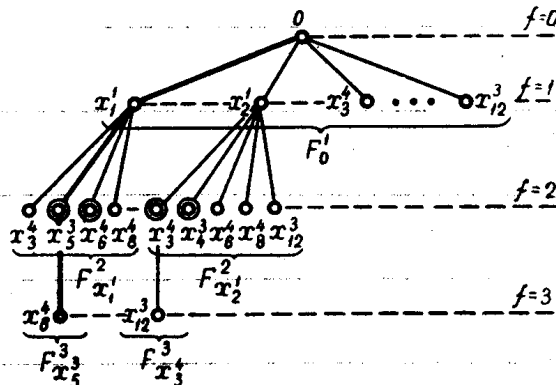


Рис. 2. Дерево частичных планов

Процесс построения дерева заключается в последовательном формировании отображений  $F_{x_t^j}^f$  на множестве вершин  $x_t^j$ , где  $f=1, 2, \dots, \mu$ ;  $\mu \leq n'$ ,  $f$  обозначает уровень отображения. Отображение первого уровня

нулевой вершине  $F_0^1 = \{x_1^j, x_2^j, \dots, x_v^j\}$ , включает множество всех  $x_t^j$  с ненулевыми оценками. Построение отображения второго уровня вершине  $x_t^j$  осуществляется на множестве  $x_\gamma^z \in F_0^1$ . Вершина  $x_\gamma^z \in F_{x_t^j}^2$ , если выполняются следующие условия:

- а)  $x_\gamma^z \in F_0^1$ ;
- б)  $\gamma > t$ ;
- в)  $z \neq j$ ;
- г)  $a_{kt} x_t^j + a_{k\gamma} x_\gamma^z \leq 1, k=1, 2, \dots, s.$  (17)

Здесь  $a_{kt}$  — коэффициенты условия (7)'' задачи  $P_2$  (для рассматриваемого примера это элементы табл. 3, стоящие на пересечении  $k$ -й строки и  $t$ -го столбца). Индексы  $\gamma, z$  имеют те же индексные множества, что и индексы  $t, j$  соответственно.

Построение отображений  $f$ -го уровня  $F_{x_t^j}^f$  осуществляется также по условиям (17), только вместо  $F_0^1$  используется  $F_{x_\gamma^z}^{f-1}$  при условии, что  $x_t^j \in F_{x_\gamma^z}^{f-1}$ .

Важным фактором, во многом определяющим эффективность метода ветвей и границ, является способ вычисления оценки. Обозначим через  $R_\gamma^z$  частичный план, содержащий вершины маршрута дерева с началом в нулевой вершине и концом в вершине  $x_\gamma^z$ , а соответствующее значение целевой функции — через  $Z_\gamma^z$ . Пусть вершине  $x_t^j$  сопоставлено отображение  $F_{x_t^j}^f$ . Каждой вершине  $x_\gamma^z \in F_{x_t^j}^f$  соответствует оценка  $c_{\gamma k}^z$ ,  $k=1, 2, \dots, \varphi$ , где  $\varphi$  — количество вершин в отображении  $F_{x_t^j}^f$ . Индекс  $k$  в обозначении  $c_{\gamma k}^z$  указывает на место соответствующей вершины  $x_\gamma^z$  в последовательности вершин отображения  $F_{x_t^j}^f$ . Заметим, что вершины  $x_\gamma^z$  в отображении  $F_{x_t^j}^f$  расположены в порядке убывания соответствующих оценок.

Оценка частичного плана  $R_\gamma^z$  складывается из двух составляющих: значения целевой функции данного частичного плана  $Z_\gamma^z$  и максимально возможного значения целевой функции  $\bar{Z}_\gamma^z$ , подсчитанной для его условного расширения. Под условным расширением здесь понимается расширение, составленное из вершин  $x_\gamma^z \in F_{x_t^j}^f$  с отличающимися номерами групп  $z$  и максимальными значениями соответствующих  $c_{\gamma k}^z$ . Таким образом, оценка  $Z_\gamma^z$  частичного плана  $R_\gamma^z$  определяется по формуле

$$R_\gamma^z = Z_\gamma^z + \bar{Z}_\gamma^z. \quad (18)$$

Величина  $\bar{Z}_\gamma^z$  в принятых обозначениях определяется по формуле

$$\bar{Z}_\gamma^z = \sum_{k=1}^{\varphi} c_{\gamma k}^z \omega_{\gamma k}^z. \quad (19)$$

где

$$\omega_{\gamma k}^z = \begin{cases} 1, & \text{если для всех оценок } c_{\gamma \lambda}^z \text{ вершин } x_\gamma^z \in F_{x_t^j}^f \text{ при } \lambda < k, \text{ справедливо } z \neq v; \\ 0, & \text{если для одной из } c_{\gamma \lambda}^z \text{ при } \lambda < k, \text{ справедливо } z = v. \end{cases}$$

Процесс движения по вершинам дерева при поиске оптимального плана осуществляется следующим образом. Формируется отображение  $F_0^1$ , затем для первой вершины  $x_1^j$  отображения  $F_0^1$  формируется отображение  $F_{x_1^j}^2$  и т. д. В общем случае для вершины  $x_{t_1}^j \in F_{x_1^j}^2$  формируется отображение  $F_{x_{t_1}^j}^{f+1}$ . Процесс формирования отображений продолжается до тех пор, пока не получится висячая вершина дерева  $x_{t_1}^j \in F_{x_{t_1}^j}^f$  для которой  $F_{x_{t_1}^j}^{f+1} = \emptyset$ . Для частичного плана  $R_{t_1}^j$  определяется значение целевой функции  $Z_{t_1}^j$ . Величину  $Z_{t_1}^j$  назовем нижней границей целевой функции и обозначим через  $Z_0$ . После этого определяется оценка  $Z_{R_{t_2}^j}$  частичного плана  $R_{t_2}^j$ , соответствующего вершине  $x_{t_2}^j \in F_{x_{t_1}^j}^f$ , и проверяется условие

$$Z_{R_{t_2}^j} > Z_0. \quad (20)$$

При выполнении условия (20) для вершины  $x_{t_2}^j \in F_{x_{t_1}^j}^f$  формируется отображение  $F_{x_{t_2}^j}^{f+1}$  и, если  $F_{x_{t_2}^j}^{f+1} \neq \emptyset$ , то определяется оценка для его первой вершины (соответствующего частичного плана) и проверяется условие (20). Процесс формирования отображений с определением оценок их первых вершин и проверки условия (20) продолжается до тех пор, пока не достигнет висячей вершины, например  $x_{t_k}^j \in F_{x_{t_{k-1}}^j}^f$ , либо для нее не выполнится условие (20). В первом случае процесс поиска оптимального плана продолжается так же, как и после определения нижней границы целевой функции. Во втором случае осуществляется так называемый обратный ход, то есть определяется оценка и проверяется условие (20) для вершины  $x_{t_{k+1}}^j$ . Обратный ход делается также в случае, если рассматриваемая вершина является последней в отображении.

Если на некотором шаге поиска при определении оценки для вершины величины  $Z_{t_i}^j$  окажется больше  $Z_0$ , то  $Z_{t_i}^j$  принимается в качестве  $Z_0$ . Процесс поиска оптимального плана заканчивается, если условие (20) для вершины  $x_{t_i}^j \in R_0$  не выполняется. Частичный план, соответствующий значению целевой функции  $Z_0$ , является решением задачи  $P_2$ . После расширения данного частичного плана за счет вариантов с нулевыми оценками и вариантов групп, содержащих варианты с одинаковыми оценками, получается оптимальный план задачи  $P_1$ .

Для рассматриваемого примера поиск оптимального плана происходит следующим образом. Строятся отображения  $F_0^1 = \{x_1^1, x_2^1, x_3^4, x_4^3, x_5^3, x_6^4, x_7^1, x_8^4, x_9^1, x_{10}^1, x_{11}^1, x_{12}^3\}$ ,  $F_{x_1^1}^2 = \{x_3^4, x_5^3, x_6^4, x_8^4\}$ ,  $F_{x_3^4}^3 = \emptyset$ . Частичному плану  $R_3^4 = \{x_1^1, x_3^4\}$  соответствует значение целевой функции  $Z_3^4 = c_1^1 + c_3^4 = 33 + 24 = 57$ , которое принимается в качестве нижней границы  $Z_0$ . Далее по формуле (18) определяется оценка вершины  $x_5^3 \in F_{x_1^1}^2$  (частичного плана  $R_5^3$ ).  $Z_{R_5^3} = Z_5^3 + \bar{Z}_5^3 = (c_1^1 + c_5^3) + c_6^4 = (33 + 17) + 14 = 64$ . Так как условие (20) выполняется ( $Z_{R_5^3} > Z_0$ ), то для вершины  $x_5^3$  строится отображение  $F_{x_5^3}^3 = \{x_6^4\}$ . Частичному плану  $R_6^4 = \{x_1^1, x_5^3, x_6^4\}$  соответствует значение целевой функции  $Z_6^4 = c_1^1 + c_5^3 + c_6^4 = 33 + 17 + 14 = 64$ , которое принимается в качестве  $Z_0$ . Оценка

$Z_{R_6^4}$  вершины  $x_6^4 \in F^2_{x_1^1}$  меньше  $Z_0$ , следовательно, делается обратный ход и производится оценка  $Z_{R_2^1}$  вершины  $x_2^1 \in R_0^1$ ,  $Z_{R_2^1} = Z_2^1 + \bar{Z}_2^1 = c_2^1 + (c_3^4 + c_4^3) = 25 + 24 + 21 = 70$ . Оценка  $Z_{R_2^1} > Z_0$  ( $70 > 64$ ), поэтому строим отображение  $F^2_{x_2^1} = \{x_3^4, x_4^3, x_6^4, x_8^4, x_{12}^3\}$  и определяем оценку вершины  $x_3^4 \in F^2_{x_2^1}$ . Оценка  $Z_{R_3^4} = 70 > Z_0$ , поэтому строится  $F^3_{x_3^4} = \{x_{12}^3\}$  и  $R_{12}^3 = 53 < Z_0$ . Оценка  $Z_{R_4^3}$  вершины  $x_4^3 \in F^2_{x_2^1}$  меньше  $Z_0$ , следовательно, делается обратный ход и определяется оценка  $Z_{R_3^4}$  вершины  $x_3^4 \in F_0^1$ ,  $Z_{R_3^4} = Z_3^4 + \bar{Z}_3^4 = c_3^4 + (c_4^3 + c_7^1) = 24 + (21 + 12) = 57$ . Оценка  $Z_{R_3^4} < Z_0$  и так как  $x_3^4 \in F_0^1$ , поиск оптимального частичного плана на этом заканчивается. Частичный план  $R_{x_6^4} = \{x_1^1, x_5^3, x_6^4\}$ , соответствующий оценке  $Z_0 = 64$ , является оптимальным. План  $R_{x_6^4}$  содержит варианты трех групп и может быть расширен включением варианта  $x_{1,2}$  исключенной группы. Полученный при этом план  $X^* = \{x_{6,1}; x_{2,3}; x_{4,4}; x_{1,2}\}$  с целевой функцией  $Z_1^* = 64$  является оптимальным для рассматриваемого примера.

В табл. 3 варианты оптимального плана отмечены звездочкой. На рис. 2 показаны все отображения, которые потребовалось строить при определении оптимального плана. Двойными кружками отмечены вершины, для которых определялись оценки.

Описанный выше метод рассматривался для задачи распределения ТС при отсутствии избыточности для случая, когда  $x_j^* = 1, j = 1, 2, \dots, n'$ . Более общей является постановка данной задачи с учетом избыточности и наличия нескольких блоков одного вида. В этом случае задача распределения ТС по блокам запишется в виде

$$P: \quad \max Z = \sum_{i=1}^{m_j} \sum_{j=1}^{n'} c_{ij} x_{ij}; \quad (21)$$

$$\sum_{i=1}^{m_j} \sum_{j=1}^{n'} a_{ijk} x_{ij} \geq 1, \quad k = 1, 2, \dots, s; \quad (22)$$

при

$$\sum_{i=1}^{m_j} x_{ij} = x_j^*, \quad j = 1, 2, \dots, n'; \quad (23)$$

$$x_{ij} = 0, 1; \quad i = 1, 2, \dots, m_j; \quad j = 1, 2, \dots, n'. \quad (24)$$

Условие (22) легко может быть сведено к условию (7) задачи (6) ÷ (9). Для этого по каждому  $r$ -у виду ТС проверяется условие

$$\sum_{j=1}^{n'} d_{rj} > b_r, \quad r = 1, 2, \dots, \omega. \quad (25)$$

Если условие (25) выполняется, то, следовательно, имеется избыточность и в схему вводится  $b'_r$  условных ТС  $r$ -го вида\*,

$$b'_r = \sum_{j=1}^{n'} d_{rj} - b_r. \quad (26)$$

\* Принимается, что условные ТС не имеют связей друг с другом и с реальными ТС схемы.

Общее число условных ТС, включенных в схему, определяется величиной  $h$

$$h = \sum_{r=1}^{\infty} b_r. \quad (27)$$

После включения условных ТС условие (22) может быть записано следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{m_j} \sum_{j=1}^{n'} a_{ijk} x_{ij} = 1; \quad k=1, 2, \dots, s, s+1, \dots, s+h. \quad (28)$$

После замены условия (22) на (28) задача  $P$  может решаться с использованием метода, изложенного для задачи  $P_1$ . При поиске оптимального плана в этом случае в группах, построенных для  $j$ -х блоков с  $x_j^* > 1$ , выбирается не по одному варианту, как в задаче  $P_1$ , а по  $x_j^*$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. К. Погребной. Покрытие схем вычислительных устройств блоками унифицированного набора. Изв. ТПИ, т. 211, Томск, 1970.