ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 270 1973

ОБ ОДНОМ ДОКАЗАТЕЛЬСТВЕ ФОРМУЛЫ ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ ПЕРЕДАЧИ ГРАФА

Л. А. НАУМОВ, Э. И. ЦИМБАЛИСТ

(Представлена научным семинаром кафедры радиотехники)

В последние годы наблюдается особый интерес к теории графов, поскольку она позволяет решение той или иной задачи сформулировать и проиллюстрировать в наглядной и лаконичной форме в виде «графа», отображающего исследуемое явление или процесс. Имеется также возможность относительно быстро решать множество громоздких и разнообразных задач, сложность которых затрудняет их решение прежними методами. Эти преимущества обеспечивают широкое применение теории графов в автоматике, в теории автоматического управления, электрического моделирования, кодирования и т. д.

В большинстве случаев применяются линейные графы, в которых каждое ребро ориентировано. Такие графы называются ориентированными или направленными. С помощью направленного графа можно отобразить произвольную систему алгебраических (дифференциальных) уравнений. Поскольку переменные в уравнениях схемы являются сигналами (токами или напряжениями), то соответствующий направленный граф часто называют сигнальным графом схемы [1].

Одной из задач анализа систем является математическое исследование ее модели для определения реакции системы на внешнее воздействие. Прямой способ получения схемных функций основан на известной формуле Мэзона [1]

$$T_{ij} = \frac{x_j}{y_i} = \frac{\sum_{\kappa=1}^{n} \Delta_\kappa P_\kappa}{\Delta}, \tag{1}$$

где P_κ — передачи κ-го сквозного пути от вершины i до j;

Δ — определитель сигнального графа

$$\Delta = 1 - \sum_r L_r^{(1)} + \sum_r L_r^{(2)} - \sum_r L_r^{(3)} + \ldots ; \tag{1a}$$

$L_r^{(c)}$ — произведение r-й комбинации из c несоприкасающихся контуров графа;

Δ_k — алгебраическое дополнение определителя сигнального графа, равное определителю части графа, не соприкасающегося с k-м сквозным путем.

Однако для сравнительно сложных схем (особенно схем с транзисторами) применение (1) связано с необходимостью топологического анализа графа (выделение контуров и сквозных путей, установление соприкасающихся путей и контуров), зачастую требующего весьма громоздких и утомительных операций, что снижает эффективность метода ориентированных графов.

Встает задача найти алгоритм, формализующий (1), решение которой может дать ход доказательства формулы Мэзона. Сам Мэзон применял при выводе (1) эвристические аргументы [2]. Один из путей формального доказательства (1) предложен в [3]. Однако его ход не дает четкого алгоритма, свободного от необходимости топологического анализа графа.

Ниже предлагается вывод формулы передачи T_{ij} для графа Мэзона, который позволяет решить поставленную задачу. Пусть имеем какой-либо n-вершинный граф (без петель), изоморфный некоторой физической структуре (рис. 1), где

y_i — возмущающие воздействия, которые поступают на соответствующие узлы графа через единичную передачу;

x_j — реакции системы, снимаемые также через единичную передачу.

Алгебраические уравнения, связанные с данными линейным графом $\vec{L}$, написанные в форме «причина-следствие», будут иметь следующий вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 - a_{21}x_2 - a_{31}x_3 - \ldots - a_{n1}x_n = y_1 \\ -a_{12}x_1 + a_{22}x_2 - a_{32}x_3 - \ldots - a_{n2}x_n = y_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -a_{1n}x_1 - a_{2n}x_2 - a_{3n}x_3 - \ldots + a_{nn}x_n = y_n, \end{cases} \tag{2}$$

где $a_{ij} = 1$ при $i = j$ или в матричной форме

$$\begin{cases} AX = Y \\ A = [a_{ij}]. \end{cases} \tag{2a}$$

A — есть не что иное, как транспонированная матрица смежности графа $\vec{L}$, с той лишь разницей, что элементы a_{ij} при $i \neq j$ имеют знак минус. Решая (2) по правилу Крамера относительно x_j, что возможно, так как A — невырожденная квадратная матрица, получаем

$$x_j = \frac{A_{1j}}{\Delta} y_1 + \frac{A_{2j}}{\Delta} y_2 + \ldots + \frac{A_{nj}}{\Delta} y_n = \frac{1}{\Delta}(A_{1j}y_1 + A_{2j}y_2 + \ldots + A_{nj}y_n). \tag{3}$$

Скобка, стоящая справа, является разложением по j-му столбцу определителя Δ_j системы, получающегося заменой j-го столбца определителя Δ столбцом Y. Допустим, что на систему действует одно y_i, возмущающее воздействие. (Это допущение не теряет общности, так как для линейной системы применим принцип суперпозиции). Тогда

$$x_j = \frac{A_{ij}}{\Delta} y_i \qquad \text{или} \qquad \frac{x_j}{y_i} = T_{ij} = \frac{A_{ij}}{\Delta}. \tag{3a}$$

На основании общей формулы разложения определителя [4] найдем

$$det\,[A] = det\,[A'] = \Delta.$$

$$det\,[A] = det \begin{bmatrix} a_{11} - a_{12} - a_{13} - \ldots - a_{1n} \\ -a_{21} + a_{22} - a_{23} - \ldots - a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -a_{n1} - a_{n2} - a_{n3} - \ldots + a_{nn} \end{bmatrix} =$$

$$= (-1)^q (-1)^\kappa \sum_r a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} a_{3\alpha_3} \ldots a_{n\alpha_n}, \tag{4}$$

где $(-1)^{\kappa}$ — учитывает знаки элементов матрицы $[A']$,

κ — число элементов $a_{i\alpha_i}$ при $i \neq \alpha_i$,

$q = n - s$ — декремент подстановки,

n — степень подстановки (число вершин),

s — число независимых циклов в разложении подстановки,

α_i — элементы второй строки подстановки.

Элементы $r\,det[A]$ представляют собой произведение различных комбинаций несоприкасающихся контуров, так как разложение подстановки по циклам включает различные индексы, а значит, и контуры не содержат одинаковых вершин. Например,

$$B = \begin{pmatrix}123456\\134265\end{pmatrix}.$$

Этой подстановке соответствует r-й член разложения определителя 6-го порядка

$$(a_{11})(a_{23}a_{34}a_{42})(a_{56}a_{65}).$$

Перепишем выражение (4) в виде

$$det[A] = \frac{(-1)^{\kappa}}{(-1)^{q}}\sum_{r} a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\ldots a_{n\alpha_n} = (-1)^{\kappa-q}\sum_{r} a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\ldots a_{n\alpha_n},$$

$\left(\text{заметим, что } \frac{(-1)^{\kappa}}{(-1)^{q}} = \frac{(-1)^{q}}{(-1)^{\kappa}} = (-1)^{(\kappa-q)} = (-1)^{(q-\kappa)}\right)$. Если $\kappa \neq 0$, $q \neq 0$ $(n \neq s)$, то

$$det[A] = 1 + (-1)^{\kappa-q}\sum_{r} a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}a_{3\alpha_3}\ldots a_{n\alpha_n}. \qquad (5)$$

Действительно, при $\kappa = 0$ и $q = 0$ получаем член разложения определителя, соответствующий произведению элементов

$$a_{ij} = 1 \qquad (i = j = n).$$

$\kappa - q$ в выражении (5) есть число несоприкасающихся циклов длиной больше единицы. На самом деле

$$\kappa - q = \kappa - n + s = s - (n - \kappa), \quad \text{а}$$

$n - \kappa$ — число циклов длиной, равной единице.

$s - (n - \kappa)$ — число циклов длиной больше единицы.

В результате получаем

$$det[A] = \Delta = 1 + (-1)^{\kappa-q}\sum_{r} L^{(\kappa-q)}, \qquad (6)$$

где $L_r^{(\kappa-q)}$ — произведение r-й комбинации из $\kappa - q$ несоприкасающихся контуров, что соответствует (1а) $(c = \kappa - q)$. Из (5) видно, что для нахождения $det[A]$ необходимо знать совокупность вторых индексов $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$, которые представляют собой некоторую перестановку натурального ряда чисел $1, 2, 3 \ldots n$. Так как мы сейчас займемся индексами, то вполне естественно, удобно для этого применить математический аппарат и символику теории множеств. Запишем матрицу смежности графа $\vec{L}$ в следующем виде:

$$A_b = [a_{ij}], \quad \text{где} \begin{cases} a_{ij} = ij \text{ — если есть передача от } i \text{ к } j \\ a_{ij} = 0 \text{ — если нет передачи от } i \text{ к } j. \end{cases} \qquad (7)$$

Если $C = \{1, 2, 3 \ldots n\}$ — множество индексов вершин, а $B_i \subseteq C$ — множество j-х индексов в i-й строке (для полного графа $B_i = C$), то операция отыскания множества B сочетаний из n различных элементов, взятых по одному от каждого из подмножества совокупности B_i, соответствует декартовому векторному перемножению подмножеств совокупности B_i и может быть представлена формулой [5]:

$$B = [B_i]\, mod_2. \tag{8}$$

Матрица смежности графа $\vec{L}$ с учетом (7) имеет вид:

$$A_b = \begin{bmatrix} 11 & 12 & 13 \ldots 1n \\ 21 & 22 & 23 \ldots 2n \\ - & - & - \quad - \quad - \\ n1 & n2 & n3 \ldots nn \end{bmatrix}.$$

Вынесем за скобку i-е элементы. Получим таблицу

$$a(m/B_l) = \begin{array}{c|c|} \bar{1} & 1\ 2\ 3 \ldots \bar{n} \\ 2 & 1\ 2\ 3 \ldots n \\ 3 & 1\ 2\ 3 \ldots n \\ - & - \ - \ - \ - \\ m & 1\ 2\ 3 \ldots n \\ - & - \ - \ - \ - \\ n & 1\ 2\ 3 \ldots n \end{array}, \tag{9}$$

элементы m которой представляют собой первую строку подстановки. Если выполним (8) с элементами B_{ij} из (9), получим структурное число B, r—1 столбцов которого и есть элементы второй строки подстановки. Для полного графа $r = n!$

Для определения числителя вернемся к выражению (3а). A_{ij} есть алгебраическое дополнение, полученное после вычеркивания из определителя i-й строки и j-го столбца.

Тогда

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}(-1)^p \sum_r \prod_{\substack{\kappa=1 \\ \kappa \neq j \\ \alpha_\kappa \neq i}}^{n-1} a_{\kappa\alpha_\kappa}, \tag{10}$$

где $p = l + h$,

l — число элементов $a_{\kappa\alpha_\kappa}$ (при $\kappa \neq \alpha_\kappa$);

h — число транспозиций второй строки подстановки, образованной с элементами множества.

$$\alpha_\kappa = \{(1, 2, 3, \ldots, i, \ldots, j, \ldots, n) - i\}, \tag{11}$$

$$\kappa = \{(1, 2, 3, \ldots, i, \ldots, j, \ldots, n) - j\}. \tag{12}$$

Для определения элементов α_κ воспользуемся также выражением (8). В матрице смежности вычеркнем i-й столбец и j-ю строку

$$A_{B'} = \begin{vmatrix} 11 & 12 \ldots 1i \ldots 1n \\ 21 & 22 \ldots 2i \ldots 2n \\ - & - \ - \ - \ - \ - \ - \\ j1 & j2 \ldots ji \ldots jn \\ - & - \ - \ - \ - \ - \ - \\ n1 & n2 \ldots ni \ldots nn \end{vmatrix}$$

В таблице

$$a'(\kappa/B_i') = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ - \\ j \\ - \\ n \end{array} \left[\begin{array}{c} 1\;2\;.\;.\;.\;i\;.\;.\;.\;n \\ 1\;2\;.\;.\;.\;i\;.\;.\;.\;n \\ -\;-\;-\;-\;-\;- \\ 1\;2\;.\;.\;.\;i\;.\;.\;.\;n \\ -\;-\;-\;-\;-\;- \\ 1\;2\;.\;.\;.\;i\;.\;.\;.\;n \end{array} \right] \qquad (13)$$

также вычеркнем соответствующие строку и столбец, тогда k — элементы, вынесенные за скобку, а r' столбцов таблицы $B' = [B_i']_2$ дадут все индексы α_κ. Вычеркивание столбца и строки из матрицы смежности аналогично размыканию (удалению) из графа всех ветвей, входящих в i-й узел и выходящих из j-го узла. Таким образом, некоторая совокупность элементов в r' из A_{ij} будет представлять сквозную передачу графа от i к j, а остальные образуют несоприкасающиеся контуры, так как индексы оставшихся элементов (если они есть) $\{k—i\,\beta\,\gamma...\varphi\}$ и $\{B_i\ —j\beta\gamma...\varphi\}$ образуют одинаковые множества, подстановку из которых всегда можно разложить на циклы. Причем эти контуры не касаются и соответствующего пути, потому что элементы подстановки не содержат индексов $i\,j\,\beta\,\gamma\,...\,\varphi$, которые соответствуют узлам, через которые проходит сквозной путь. В итоге получаем, что совокупность элементов A_{ij} соответствует числителю выражения (1).

На основании вышеизложенного можно предложить следующий алгоритм нахождения передачи графа.

1. Записываем матрицу смежности графа (7) и таблицы (9), (13).
2. Вычисляем B и B'.
3. Записываем передачу T_{ij} по формулам (5) и (10).

Пример 1. Определить передачу T_{23} графа рис. 2.

1. Записываем матрицу смежности (7)

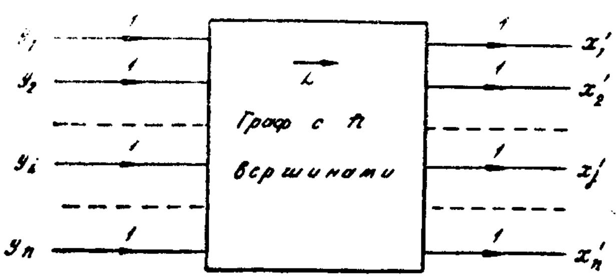

Рис. 1

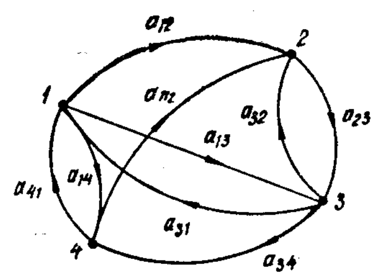

Рис. 2

$$[A] = \begin{bmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 0 & 22 & 23 & 0 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 0 & 44 \end{bmatrix}$$

2. Находим B и B':

$$a(m/B_i) = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \left[\begin{array}{l} 1\;2\;3\;4 \\ 2\;3 \\ 1\;2\;3\;4 \\ 1\;2\;4 \end{array} \right]$$

$$B = \begin{bmatrix} 1\ 2\ 3\ 4 \\ 23 \\ 1\ 2\ 3\ 4 \\ 124 \end{bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 4 & 1 & 4 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 2 & 4 & 1 & 4 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$a'(\kappa/B_i') = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 4 \end{array}\begin{bmatrix} 1\ 3\ 4 \\ 3 \\ 1\ 4 \end{bmatrix} \qquad B' = \begin{bmatrix} 1\ 3\ 4 \\ 3 \\ 1\ 4 \end{bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_{23} = \frac{a_{23} - a_{23}a_{14}a_{41}}{\Delta};$$

$$\Delta = 1 - a_{23}a_{32} - a_{23}a_{34}a_{42} - a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{23}a_{34}a_{41} - a_{13}a_{34}a_{41} - a_{14}a_{41} - - a_{14}a_{42}a_{23}a_{31} + a_{14}a_{41}a_{23}a_{32}.$$

Основной трудностью при использовании предложенного алгоритма является определение знака при записи числителя и знаменателя передаточной функции. От этого недостатка можно избавиться, если использовать, например, при определении элементов знаменателя процедуру разложения подстановок, образованных элементами множесгва m и соответствующими элементами таблицы B, на независимые циклы (длиною больше единицы), причем при четном числе таких циклов ставится знак плюс, при нечетном — минус.

Для определения числителя при заданных i и j поступим следующим образом. Вычеркнем из матрицы смежности все элементы i-го столбца и j-й строки и на их пересечении поставим элемент с единичной передачей ($a'_{ij} = 1$).

Аналогично, как и для знаменателя, находим элементы числителя с учетом, что сомножитель с индексами j, i равен единице, знак плюс — при нечетном числе независимых циклов разложения, при четном — минус. Этот алгоритм реализован в программе «Граф-01».

ЛИТЕРАТУРА

1. Мэзон, Г. Циммерман. Электронные цепи, сигналы и системы. Изд. иностр. лит., 1963.

2. С. Сешу, М. Б. Рид. Линейные графы и электрические цепи. «Высшая школа», 1971.

3. В. П. Сигорский, А. И. Петренко. Основы электронных схем. «Вища школа», 1971.

4. А. Г. Курош. Курс высшей алгебры. «Наука», 1971.

5. Я. К. Трохименко. Метод обобщенных чисел и анализ линейных цепей. «Сов. радио», 1972.