

## О НЕКОТОРЫХ АЛГОРИТМАХ АНАЛИЗА СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

Э. И. ЦИМБАЛИСТ, Л. А. НАУМОВ

(Представлена научным семинаром кафедры радиотехники)

К настоящему времени разработан ряд эффективных методов анализа электронных схем, предполагающих проведение в определенной последовательности формальных операций над матрицей или графом исследуемой схемы [1—3 и др.]. Так, например, широко известным является способ анализа сложных электрических цепей с обратимыми и необратимыми компонентами, основанный на методе обобщенных чисел, отличающийся минимальным объемом необходимых выкладок и пригодный как для ручных расчетов, так и для ЦВМ [2].

Ниже предлагаются алгоритмы, формализующие запись формулы Мэсона для систем, представленных сигнальным графом или матрицей смежности.

Пусть имеется система, содержащая  $n$  вершин, соединенных между собой множеством ориентированных дуг  $r_{ij}$ , которая может быть представлена матрицей смежности графа  $\vec{L}$  [4]. Эту матрицу удобно записать в следующем виде:

$$R \doteq [r_{ij}],$$

где  $\begin{cases} r_{ij} = ij, & \text{если имеется передача от } i \text{ к } j, \\ r_{ij} = 0, & \text{если нет передачи от } i \text{ и } j. \end{cases}$

Таким образом, в любой строке матрицы  $R$  находятся все дуги, для которых данная вершина является истоком, т. е. полувезды исхода, а в столбце — дуги, для которых эта же вершина является стоком (находятся полувезды захода).

Поставим задачу:

1. Найти аддитивную помеху (выходной сигнал  $v_j$ ).
2. Определить чувствительность передачи  $T_{ij}$  графа к изменениям передачи любой ветви [5]

$$S_T = \frac{\partial T_{ij}}{\partial r_{ab}} = T_{ia} \cdot T_{bj}, \quad (1)$$

где  $T_{ij} = \frac{1}{\Delta} \sum_{\kappa} p_{\kappa} \Delta_{\kappa}$  — передача графа от  $i$  к  $j$ , (2)

$p_{\kappa}$  — передача  $\kappa$ -го пути от  $i$  к  $j$ ,

$\Delta_{\kappa}$  — алгебраическое дополнение  $\kappa$ -го пути,

$$\Delta = 1 - \sum_q L_q^{(1)} + \sum_q L_q^{(2)} - \sum_q L_q^{(3)} + \dots, \text{ а}$$

$L_q^{(p)}$  — произведение  $q$ -й возможной комбинации  $p$  некасающихся контуров.

Если для простых систем использование (1), (2) не вызывает затруднений, то для достаточно сложных с большим числом перекрестных связей вычисление  $T_{ij}$  непосредственно из рассмотрения графа не дает полной гарантии, что все передачи и контуры найдены. Поставленная задача может быть решена путем возведения матрицы смежности  $[R]$  в  $n$ -ю степень и проведения некоторых логических операций. Все необходимые составляющие (1), (2) будут находиться в элементах  $(i \dots j)_\Sigma$ ,  $(i \dots i)_\Sigma$  суммарной матрицы

$$[R]_\Sigma = \sum_{m=1}^{l-n} [R]^m,$$

где

$$(i \dots j)_\Sigma = \sum_{m=1}^{n-1} (i \dots j)_m; \quad (i \dots i)_\Sigma = \sum_{m=2}^n (i \dots i)_m.$$

Этот алгоритм легко программируется, но является избыточным и поэтому сильно загружает оперативную память ЦВМ.

Указанные трудности в значительной мере можно преодолеть, если привлечь теоретико-множественные методы анализа, используя при этом символику теории множеств и проводя операции над полем модуля 2. Тогда для нахождения (1), (2), т. е. всех контуров и путей между вершинами, можно использовать следующий алгоритм:

1. На основе графа или его матрицы смежности составляется таблица полужвезд исхода, образованных множествами дуг, исходящих из  $m$ -й вершины графа

$$\beta_m(m/l) = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \cdot \\ n \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 2 & \dots & n \end{bmatrix}, \quad (3)$$

где  $l = \{1, 2, \dots, n\}$  — множество вершин, на которых заканчиваются дуги, исходящие из  $m$ .

2. Из  $\beta_m(m/l)$  очищается главная диагональ, т. е. исключаются (и запоминаются) простейшие контуры — петли вокруг  $m$ -й вершины. В результате образуется таблица полужвезд исхода суграфа без петель, которую удобно записать в виде соответствия  $m$ -й вершине множества вершин  $l_m$ .

$$\begin{matrix} 1 & \text{---} & l_1 \\ 2 & \text{---} & l_2 \\ \cdot & \dots & \cdot \\ m & \text{---} & l_m \\ \cdot & \dots & \cdot \\ n & \text{---} & l_n \end{matrix} \quad (3')$$

Естественно, что в (3) или (3') имеется информация о всех одноходовых путях.

3. Для любого элемента (3) или (3'), начинающегося с  $m = i$ , составляется скалярно-векторное произведение (последнее выполняется над полем модуля 2), т. е. образуется совокупность новых чисел вида

$$\beta \left( m / \begin{bmatrix} l_m \\ l_m \end{bmatrix}_2 \right). \quad (4)$$

В (4) находятся все двухходовые пути и контуры, полученные при совпадении  $m$  с  $i-n$  элементом множества  $l_m$ , которые запоминаются и удаляются из последующих операций.

4. Для каждого элемента (4) повторяется операция, изложенная выше с той только разницей, что  $m'$  (а значит, и  $l_m$ ) соответствует

последнему индексу  $v = m'$  прежнего числа и векторное произведение берется только с  $\gamma$ . После устранения дубликаций при нахождении векторного произведения и запоминания трехходовых контуров (они также удаляются) алгоритм продолжается до тех пор, пока не будут найдены все  $n-1$  пути и контуры. При выполнении  $n$ -й операции в  $l_m$  учитывается только  $m$ , что соответствует гамильтонову контуру (если он существует).

Нахождение всех путей и контуров по предложенному выше алгоритму рассмотрим на примере.

Пример 1. Рассмотрим сигнальный граф (рис. 1), изоморфный некоторой физической структуре.

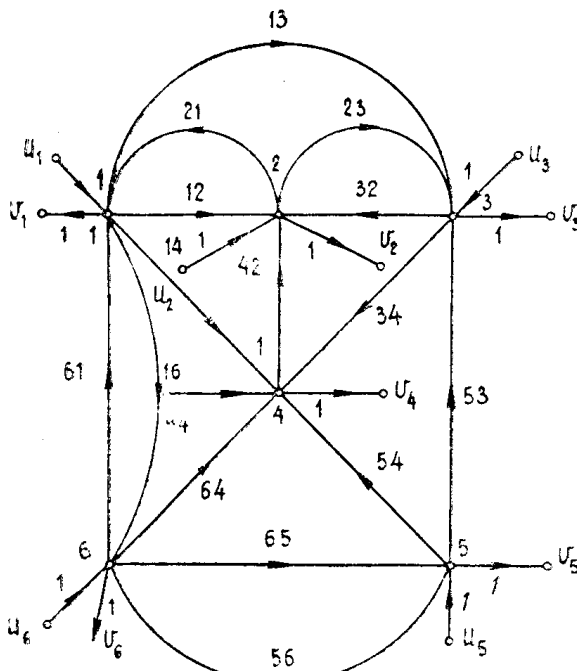


Рис. 1

и составим для него таблицу полувезд исхода в виде (3) и (3')

$$\mathfrak{P}_m(m/l) = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \begin{bmatrix} - & 234 & - & 6 \\ 1 & - & 3 & - & - & - \\ - & 2 & - & 4 & - & - \\ - & 2 & - & - & - & - \\ - & - & 34 & - & 6 & - \\ 1 & - & - & 4 & 5 & - \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{matrix} 1-2346 \\ 2-13 \\ 3-24 \\ 4-2 \\ 5-346 \\ 6-145 \end{matrix} \quad (3')$$

1. Выписываем одноходовые пути: 12, 13, 14, 16, 21, 23, 32, 34, 42, 53, 54, 56, 61, 64, 65.

2. Определяем двухходовые пути и контуры:

$$1 \times \left[ \begin{matrix} 2 & 3 & 4 & 6 \\ 13 & 24 & 2 & 145 \end{matrix} \right]_2 = 121, 123, 132, 134, 142, 161, 164, 165;$$

$$2 \times \left[ \begin{matrix} 1 & 3 \\ 2346 & 24 \end{matrix} \right]_2 = 212, 213, 214, 216, 232, 234;$$

$$3 \times \left[ \begin{matrix} 2 & 4 \\ 13 & 2 \end{matrix} \right]_2 = 321, 323, 342;$$

$$4 \times \left[ \begin{matrix} 2 \\ 13 \end{matrix} \right]_2 = 421, 423;$$

$$5 \times \left[ \begin{matrix} 3 & 6 & 4 \\ 24 & 145 & 2 \end{matrix} \right]_2 = 532, 534, 542, 561, 564, 565;$$

$$6 \times \left[ \frac{1}{2346} \frac{4}{2} \frac{5}{346} \right]_2 = 612, 613, 614, 616, 642, 653, 654, 656.$$

3. Находим трехходовые пути и контуры:

$$1 \times \left[ 2 \times \frac{3}{24} 3 \times \frac{2}{13} 3 \times \frac{4}{2} 4 \times \frac{2}{13} 6 \times \frac{4}{2} 6 \times \frac{5}{346} \right]_2 =$$

$$= 1234, 1321, 1242, 1421, 1423, 1642, 1652, 1654;$$

$$2 \times \left[ 1 \times \frac{3}{24} 1 \times \frac{4}{2} 1 \times \frac{6}{145} 3 \times \frac{4}{2} \right]_2 = 2132, 2134, 2142, 2164, 2165, 2342$$

и т. д.

4. Устраняя дубликации среди контуров, получаем множество путей  $(p_k)_{ij}$  и все контуры:

$$\begin{aligned} (p_k)_{12} &= 12, 132, 142, 1342, 1642, 16532, 16542, 165342; \\ (p_k)_{13} &= 13, 123, 1423, 1653, 16423, 165423; \\ (p_k)_{14} &= 14, 134, 164, 1234, 1654, 16534; \\ (p_k)_{15} &= 165; \\ (p_k)_{16} &= 16; \\ (p_k)_{21} &= 21; \\ (p_k)_{23} &= 23, 213, 21653; \\ (p_k)_{24} &= 214, 234, 2134, 2164, 21654, 216534; \\ (p_k)_{25} &= 2165; \\ (p_k)_{26} &= 216; \\ (p_k)_{31} &= 321, 3421; \\ (p_k)_{32} &= 32, 342; \\ (p_k)_{34} &= 34, 3214, 32164, 321654; \\ (p_k)_{35} &= 32165, 342165; \\ (p_k)_{36} &= 3216, 34216; \\ (p_k)_{41} &= 421; \\ (p_k)_{42} &= 42; \\ (p_k)_{43} &= 423, 4213, 421653; \\ (p_k)_{45} &= 42165; \\ (p_k)_{46} &= 4216; \\ (p_k)_{51} &= 561, 5321, 5421, 53421; \\ (p_k)_{52} &= 532, 542, 5342, 5612, 5642, 56132, 56142, 561342; \\ (p_k)_{53} &= 53, 5423, 5613, 54213, 56123, 561423, 564213; \\ (p_k)_{54} &= 54, 534, 564, 5614, 53214, 56134, 532164, 561234; \\ (p_k)_{56} &= 56, 53216, 54216, 534216; \\ (p_k)_{61} &= 61, 6421, 65321, 65421, 653421; \\ (p_k)_{62} &= 612, 642, 6132, 6142, 6532, 6542, 61342, 65342; \\ (p_k)_{63} &= 613, 653, 6123, 6423, 61423, 64213, 65423, 654213; \end{aligned} \tag{5}$$

$$(p_{\kappa})_{64} = 64, 614, 654, 6134, 6531, 61234, 653214;$$

$$(p_{\kappa})_{65} = 65;$$

$$L_1 = 121; L_2 = 161, L_3 = 232, L_4 = 565, L_5 = 1321, L_6 = 1421, L_7 = 2342, \\ L_8 = 13421, L_9 = 16421, L_{10} = 165321, L_{11} = 165421, L_{12} = 1653421.$$

Дальнейший анализ, приводящий к (1, 2), сводится к отысканию контуров, соприкасающихся между собой и выбранными  $(P_{\kappa})_{ij}$ . Критерием соприкасаемости является наличие хотя бы одного общего индекса.

При проведении вычислений полезным оказывается самопредставление графа  $\vec{L}$  в обыкновенный граф  $L$ , вершинами которого являются контуры  $\vec{L}$ , а ребро между  $i$ -й и  $j$ -й вершиной  $L$  существует только тогда, когда указанные два контура не соприкасаются. Тогда  $L_q^{(2)}$  определяется произведением индексов вершин, инцидентных друг другу,  $L_q^{(3)}$  — произведением индексов вершин, полных трехвершинных подграфов  $L$  и т. д. (рис. 2).

Из рис. 2 видно, что  $L_q^{(2)} = 0$  при  $\alpha \geq 3$  (так как отсутствуют полные  $\alpha \geq 3$ -вершинные подграфы).

Тогда

$$\Delta = 1 - \sum_{q=1}^{12} L_q + L_4(L_1 + L_3 + L_5 + L_6 + L_7 + L_8) + L_2(L_3 + L_7).$$

Для рассматриваемого примера, если  $i = 1; j = 3$ , то

$$1. \quad T_{13} = \frac{(13 + 123 + 1423)(1 - 565) + 1653 + 16423 + 165423}{\Delta} = \\ = \frac{[r_{13} + r_{23} \cdot (r_{12} + r_{14} \cdot r_{42})] (1 - r_{56} \cdot r_{65}) +}{\Delta} \\ + r_{16} [r_{65} \cdot r_{53} + r_{42} \cdot r_{23} (r_{64} + r_{65} \cdot r_{54})]$$

$$2. \quad S_T = \frac{\partial T_{13}}{\partial r_{65}} = T_{16} \cdot T_{53}; \quad T_{16} = \frac{16 [1 - 232 - 2342]}{\Delta};$$

$$T_{53} = \frac{53(1 - 121 - 161 - 1421 - 16421) + 5423(1 - 161) + 5613 +}{\Delta} \\ + 54213 + 56123 + 561423 + 564213$$

Для решения только задачи (2) при фиксированных  $i$  и  $j$  вышеизложенный алгоритм является также избыточным (для определения  $\Delta$  требуется проводить все операции). В этом случае целесообразнее использовать следующий алгоритм, основанный на процедуре Хонауфенкампа сокращения состояний [6], отличающийся тем, что элементы главной диагонали—исходной и полученных в процессе  $(n-1)$  преобразований матриц регулярно выписываются и не используются в каждой последующей операции. На  $(n-2)$  этапе сокращения состояний получим передачу  $(P_{\kappa})_{ij}$ , а элементы главных диагоналей дают все контуры (без дубликаций). Дальнейшая операция сводится к определению фактора соприкасаемости. Рассмотрим этот алгоритм на примере.

Пример 2. Найти  $T_{13}$  сигнального графа (рис. 1).

1. Составим матрицу смежности

$$[R] = \begin{bmatrix} 0 & 13 & 12 & 14 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 32 & 34 & 0 & 0 \\ 21 & 23 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 42 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 53 & 0 & 54 & 0 & 56 \\ 61 & 0 & 0 & 64 & 65 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Удаляем шестой узел

$$[R]^{(6)} = \begin{bmatrix} 161 & 13 & 12 & 14; & 164 & 165 \\ 0 & 0 & 32 & 34 & 0 & \\ 21 & 23 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 42 & 0 & 0 & \\ 561 & 53 & 0 & 54; & 564 & 565 \end{bmatrix}. \quad \begin{array}{l} L_2 = 161; \\ L_4 = 565. \end{array}$$

3. Удаляем пятый узел

$$[R]^{(5)} = \begin{bmatrix} 0 & 13; & 1653 & 12 & 14; & 164; & 1654 \\ 0 & 0 & 32 & 34 & & & \\ 21 & 23 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 42 & 0 & & & \end{bmatrix}.$$

4. Удаляем четвертый узел

$$[R]^{(4)} = \begin{bmatrix} 0 & 13; & 1653 & 12; & 142; & 1642; & 16542 \\ 0 & 0 & 32; & 342 & & & \\ 21 & 23 & & 0 & & & \end{bmatrix}.$$

5. Удаляем второй узел

$$[R]^{(2)} = \begin{bmatrix} 121, & 1421, & 16421, & 165421 & 13, & 1653, & 123, & 1423, & 16423, & 165423 \\ & 321, & 3421 & & & & 323, & 3423 & & \end{bmatrix}.$$

$$L_1 = 121; \quad L_6 = 1421; \quad L_9 = 16421; \quad L_{11} = 165421; \quad L_3 = 323; \quad L_7 = 3423.$$

6. Удаляем третий узел для получения всех недостающих контуров.

$$L_5 = 1321; \quad L_{10} = 165321; \quad L_8 = 13421; \quad L_{12} = 1653421;$$

$$T_{13} = \frac{(13 + 123 + 1423)(1 - 565) + 1653 + 16423 + 165423}{\Delta}.$$

Следует обратить внимание, что нахождение  $S_T$  по формуле (1) удобно для нахождения нулевой чувствительности коэффициента передачи к вариациям параметров любых дуг.

Пример 3. Сместся измерительный усилитель (схема Беггели), граф которого изображен на рис. 3. Найти условие нулевой чувствительности от нестабильности передачи дуг  $12 = -K_0$  и  $34 = -K_1$ :

$$1. \quad S_T = \frac{\partial T_{14}}{\partial r_{12}} = T_{11} \cdot T_{24} = \frac{1}{\Delta^2} (1 - \alpha_2 K_1) = 0,$$

$$2. \quad S_T = \frac{\partial T_{14}}{\partial r_{34}} = T_{13} \cdot T_{44} = \frac{1}{\Delta^2} (\alpha_1 - K_0 \alpha_2) = 0. \quad (6)$$

В результате имеем  $\alpha_2 = \frac{1}{1 + K_0}$ ;  $\alpha_1 = \frac{K_0}{1 + K_0}$ ;  $K_1 = 1 + K_0$ .

В ряде случаев при анализе сложных измерительных систем приходится сталкиваться с необходимостью определения мультипликативной помехи при вариациях одного или двух параметров звеньев. При этом удобно выразить ошибку системы через топологические элементы графа.

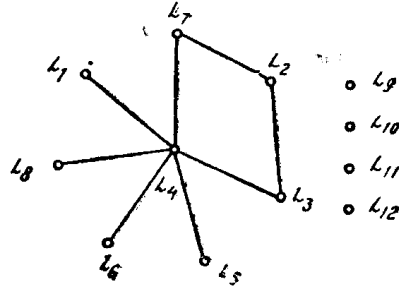


Рис. 2

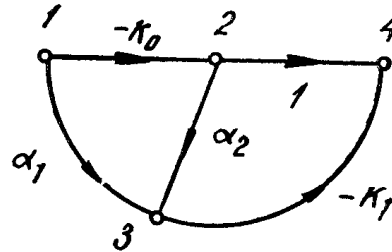


Рис. 3

Пусть  $T_{ij} = f(x \dots y \dots)$ , где

$$\left. \begin{array}{l} x = r_{ab} \\ y = r_{cd} \end{array} \right\} var.$$

Тогда

$$\Delta T_{ij} \simeq \frac{\partial T_{ij}}{\partial x} dx + \frac{\partial T_{ij}}{\partial y} dy + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial y^2} dy^2 \right).$$

$$\delta = \frac{\Delta T_{ij}}{T_{ij}} \simeq \frac{1}{T_{ij}} \left[ S_T^{(x)} \cdot x \cdot \delta_x + S_T^{(y)} \cdot y \delta_y + \frac{1}{2} (S_T^{(x^2)} x^2 \delta_x^2 + 2S_T^{(x,y)} x \cdot y \cdot \delta_x \delta_y + S_T^{(y^2)} y^2 \delta_y^2) \right],$$

где  $\frac{dx}{x} = \delta_x$ ;  $\frac{dy}{y} = \delta_y$ ;

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x} = S_T^{(x)} = S_T^{(ab)} = T_{ia} \cdot T_{bj}; \quad (7)$$

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial y} = S_T^{(y)} = S_T^{(cd)} = T_{ic} \cdot T_{dj};$$

$$\frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x^2} = S_T^{(x^2)} = 2T_{ia} \cdot T_{ba} \cdot T_{bj} = 2S_T^{(x)} \cdot T_{ba};$$

$$\frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial y^2} = S_T^{(y^2)} = 2T_{ic} \cdot T_{dc} \cdot T_{dj} = 2S_T^{(y)} T_{dc};$$

$$\frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x \partial y} = S_T^{(x,y)} = T_{ic} \cdot T_{da} \cdot T_{bj} + T_{ia} + T_{bc} \cdot T_{dj}.$$

Таким образом, вторая частная производная в (7) выражается через сумму произведений передач, первое из слагаемых которой состоит из произведения передачи от входного узла графа  $i$  до начала первой варьируемой дуги на передачу от конца этой дуги до начала второй варьируемой дуги, на передачу от конца второй дуги до выхода системы  $j$ . При нахождении сомножителей второго слагаемого варьируемые ветви меняются местами.

Пример 4. Для схемы примера 3 (рис. 3) определить коэффициент при  $\delta_x \cdot \delta_y$  ( $i = a = 1, b = 2, c = 3, d = j = 4$ )

$$\delta_{(x,y)} = \frac{r_{ab} \cdot r_{cd} (T_{ic} \cdot T_{da} \cdot T_{bj} + T_{ia} \cdot T_{bc} \cdot T_{dj})}{T_{ij}} \cdot \delta_x \delta_y = K_1 \alpha_2 \delta_x \cdot \delta_y.$$

С учетом условий (6) коэффициент при  $\delta_x \delta_y$  равен 1.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. П. Сигорский, А. И. Петренко. Основы теории электронных схем. «Техника», 1967.
2. Я. К. Трохименко. Метод обобщения чисел и анализ линейных цепей. «Сов. радио», 1972.
3. Ю. М. Калниболотский. Матрично-топологический анализ радиоэлектронных схем. Республиканский сборник «Радиотехника», 1969, № 11.
4. А. А. Зыков. Теория конечных графов. «Наука», 1969.
5. И. Чайка. Чувствительность передачи ориентируемого графа к изменениям передачи любой ветви графа. Известия вузов СССР, «Радиоэлектроника», 1971, № 3.
6. С. Сешу, М. Б. Рид. Линейные графы и электрические цепи. «Высшая школа», 1971.