ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ
И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА им. С. М. КИРОВА

Том 276 1976

УДК 538.4

БЕГУЩЕЕ МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ КАНАЛЕ ПРИ ЛАМИНАРНОМ РЕЖИМЕ ТЕЧЕНИЯ ТОКОПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ

Ю. Б. ВОЛЫНСКИЙ

(Представлена научным семинаром физико-технического факультета)

Рассматривается задача о распределении бегущего электромагнитного поля в цилиндрическом канале при ламинарном режиме течения токопроводящей жидкости.

Показано, что при параболическом профиле скоростей может быть получено решение, содержащее вырожденные гипергеометрические функции, которое в режиме короткого замыкания может быть сведено к известному решению, полученному с использованием модифицированных функций Бесселя.

Библиографий 6.

Получено решение задачи о распределении электромагнитных полей в проводящей жидкости, движущейся в плоском канале с распределением скоростей, заданных по степенному закону [1], однако представляет интерес и изучение распределения электромагнитных полей в цилиндрических каналах без внутренних ферромагнитных сердечников, где из-за малой «глубины проникновения» тока основные потери энергии имеют место в кольцевом слое жидкого металла, который прилегает к внутренней поверхности трубопровода, причем распределение скоростей в этом слое может существенно отличаться от средней скорости течения жидкости.

Рассмотрим задачу о распределении электромагнитных полей в цилиндрическом канале, расположенном в бегущем магнитном поле, при условии, что внутренний ферромагнитный сердечник отсутствует, скорость жидкого металла имеет только одну составляющую, направленную вдоль оси канала, а распределение скоростей описывается выражением

$$v = v_{\text{ср}} \cdot 2\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) = 4\tau f\,(1 - S_{\text{ср}}) \cdot \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \tag{1}$$

и не зависит от величины индукции в канале. Такое допущение может иметь место при малых значениях чисел Гартмана [2].

В выражении (1)

R — внутренний радиус канала,

$S_{\text{ср}}$ — среднее скольжение,

τ — полюсное деление,

f — частота.

Если пренебречь толщиной стенок канала, то уравнение для вектор-потенциальной функции [3] с учетом выражения (1) будет иметь следующий вид:

$$x^2 \frac{d^2\dot{A}_m}{dx^2} + x\,\frac{d\dot{A}_m}{dx} - [\dot{m}x^4 + \dot{n}x^2 + 1]\,\dot{A}_m = 0, \tag{2}$$

где A_m — вектор-потенциальная функция,

$$x = \frac{r}{R},$$

$$\dot{m} = f2\varepsilon(1 - S_{\text{ср}})\frac{\pi^2 R^2}{\tau^2},$$

$$\dot{n} = [1 - j\varepsilon(1 - 2S_{\text{ср}})]\frac{\pi^2 R^2}{\tau^2},$$

$$\varepsilon = \frac{2\pi f \sigma \mu_0}{\pi^2}\tau^2,$$

σ — электропроводность,
μ_0 — магнитная проницаемость.

Подстановки $\dot{A}_m = U^{-\frac{1}{2}} V(U)$, $U = x^2$ приводят к уравнению

$$\dot{V}'' - \left(\frac{\dot{m}}{4} + \frac{\dot{n}}{4} U^{-1}\right)\dot{V} = 0. \quad (3)$$

Одно из решений этого уравнения может быть получено в виде [4]

$$\dot{V} = \dot{C}_1 \sqrt{\dot{m}} U e^{-\frac{\sqrt{\dot{m}}}{2} U} F\left(1 + \frac{\dot{n}}{4\sqrt{\dot{m}}}, \sqrt{\dot{m}}\, U, 2\right), \quad (4)$$

где

$$F = 1 + \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{\dot{n}}{4\sqrt{\dot{m}}}\right)\cdot\left(2 + \frac{\dot{n}}{4\sqrt{\dot{m}}}\right)\ldots\left(1 + \kappa - 1 + \frac{\dot{n}}{4\sqrt{\dot{m}}}\right)(\sqrt{\dot{m}} U)^{\kappa}}{2\cdot 3\cdot 4\ldots(2 + \kappa - 1)\cdot\kappa!}, \quad (5)$$

вырожденная гипергеометрическая функция, существующая при всех значениях $\sqrt{\dot{m}} U$.

Общее решение уравнения (2) будет иметь вид

$$\dot{A}_m = Y(r)\left[\dot{C}_1 + \dot{C}_2 \int \frac{dr}{Y^2(r)}\right], \quad (6)$$

где

$$Y(r) = r \cdot e^{-\frac{\sqrt{\dot{m}}}{2}} U \cdot F. \quad (7)$$

Постоянные интегрирования $\dot{C}_1$ и $\dot{C}_2$ определяются с учетом граничных условий $B_{mr}|_{r=0} = 0$, $B_{mz}|_{r=R} = \mu_0 \delta_m$, где δ_m — линейная токовая нагрузка.

$$\dot{C}_1 = \frac{\mu_0 \delta_m}{e^{-\frac{\sqrt{\dot{m}}}{2}}\left\{2 + \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{\dot{n}}{4\sqrt{\dot{m}}}\right)\cdot\left(2 + \frac{\dot{n}}{4\sqrt{\dot{m}}}\right)\ldots\left(\kappa - 1 + \frac{\dot{n}}{4\sqrt{\dot{m}}}\right)\left(\kappa + \frac{\dot{n}}{2\sqrt{\dot{m}}}\right)\dot{m}^{\frac{\kappa}{2}}}{[\kappa!]^2}\right\}}, \quad (8)$$

$$C_2 = 0. \quad (9)$$

Таким образом, при параболическом профиле скоростей токопроводящей жидкости в цилиндрическом канале без внутреннего ферромагнитного сердечника амплитуда нормальной составляющей индукции равна

$$\dot{B}_{mr} = j\frac{\pi}{\tau} r e^{\frac{\sqrt{\dot{m}}}{2}\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)} \frac{\mu_0 \delta_m F\left(1+\frac{\dot{n}}{4\sqrt{\dot{m}}},\ \sqrt{\dot{m}}\frac{r^2}{R^2},\ 2\right)}{2+\sum\limits_{\kappa=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{\dot{n}}{4\sqrt{\dot{m}}}\right)\left(2+\frac{\dot{n}}{4\sqrt{\dot{m}}}\right)\dots\left(\kappa-1+\frac{\dot{n}}{4\sqrt{\dot{m}}}\right)\cdot\left(\kappa+\frac{\dot{n}}{2\sqrt{\dot{m}}}\right)\dot{m}^{\frac{\kappa}{2}}}{[\kappa!]^2}}, \tag{10}$$

тангенциальной составляющей

$$\dot{B}_{mz} = \mu_0\delta_m e^{\frac{\sqrt{\dot{m}}}{2}\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)} \frac{\left\{2+\sum\limits_{\kappa=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{\dot{n}}{4\sqrt{\dot{m}}}\right)\dots\left(\kappa-1+\frac{\dot{n}}{4\sqrt{\dot{m}}}\right)\left(\kappa+\frac{\dot{n}}{2\sqrt{\dot{m}}}\right)\dot{m}^{\frac{\kappa}{2}} r^{2\kappa}}{[\kappa!]^2 R^{2\kappa}}\right\}}{2+\sum\limits_{\kappa=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{\dot{n}}{4\sqrt{\dot{m}}}\right)\dots\left(\kappa-1+\frac{\dot{n}}{4\sqrt{\dot{m}}}\right)\times\left(\kappa+\frac{\dot{n}}{2\sqrt{\dot{m}}}\right)\dot{m}^{\frac{\kappa}{2}}}{[\kappa!]^2}}. \tag{11}$$

Легко показать [5], что в режиме короткого замыкания при $S_{\text{ср}} = 1$, $\dot{m} = 0$, $\dot{n} = \frac{\pi^2}{\tau^2}(1+j\varepsilon)\cdot R^2$ выражения (10—11) преобразуются в известные выражения [6]:

$$\dot{B}_{mr} = j\mu_0\delta_m \frac{\frac{\pi}{\tau}\cdot I_1\left(\frac{\pi}{\tau}\sqrt{1+j\varepsilon}\cdot r\right)}{\sqrt{\frac{\pi^2}{\tau^2}+j2\pi f\sigma\mu_0}\, I_0\left(\frac{\pi}{\tau}\sqrt{1+j\varepsilon}\cdot R\right)} \tag{12}$$

и

$$\dot{B}_{mz} = \mu_0\delta_m \frac{I_0\left(\frac{\pi}{\tau}\sqrt{1+j\varepsilon}\cdot r\right)}{I_0\left(\frac{\pi}{\tau}\sqrt{1+j\varepsilon}\cdot R\right)}. \tag{13}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. М. Дронник, И. М. Толмач. ИАН СССР, «Энергетика и транспорт», № 3, 1964, 363.
2. И. М. Кирко. Жидкий металл в электромагнитном поле. М., «Энергия», 1964.
3. И. А. Тютин. Электромагнитные наносы для жидких металлов. Рига, изд. АН Латв. ССР, 1959.
4. Э. Камке. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., «Наука», 1965.
5. Э. Грей. Г. Б. Метьюз. Функции Бесселя и их приложения в физике и механике. М., ИЛ., 1953.
6. Э. Г. Кюльм, Х. И. Янес. Труды ТПИ, серия А, № 231, 1965, 3.