ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ
И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ. С. М. КИРОВА

Том 277 1977

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРА α В РЕГУЛЯРИЗУЮЩЕМ АЛГОРИТМЕ РЕШЕНИЯ ПЛОХО ОБУСЛОВЛЕННЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

А. Л. ДЕЙНЕЖЕНКО, Н. И. САБЛИН

(Представлена научным семинаром НИИ ядерной физики, электроники и автоматики)

1. Пусть дана система линейных алгебраических уравнений:

$$\mathrm{A}x=\overline{b}, \tag{1}$$

$\mathrm{A}=\{a_{ij}\}$ — невырожденная матрица,

$x=\{x_j\}$, $b=\{b_i\}$, $i, j=1, 2, \ldots, n$.

Если правая часть системы (1) задана с некоторой погрешностью $\delta: \| b-\overline{b}\| \leqslant \delta$ и матрица A плохо обусловлена (число обусловленности матрицы A $k(\mathrm{A})=\|\mathrm{A}\| \cdot \|\mathrm{A}^{-1}\|$ велико), то задача нахождения нормального решения $\overline{x}$ [1] некорректна по Адамару, так как решение (1) неустойчиво.

Будем пользоваться евклидовой нормой вектора $\|x\|=\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/2}$ и согласованной с ней спектральной нормой матрицы $\|\mathrm{A}\|=\mu_1=\max \mu_i$, где μ_i — спектральные числа матрицы A.

2. Рассмотрим функционал [1].

$$\mathrm{M}^{\alpha}\,[x,\ \mathrm{A},\ b]=\|\mathrm{A}x-b\|^2+\alpha\|x\|^2,\ \ \alpha>0. \tag{2}$$

Согласно [1] x^{α_i}, соответствующее значению параметра регуляризации α_i $i=1, 2, \ldots$ и минимизирующее функционал M^{α} $[x, \mathrm{A}, \mathrm{b}]$, дает устойчивое приближение к нормальному решению системы (1).

Для нахождения минимума функционала (2) решаем уравнение Эйлера для $\mathrm{M}^{\alpha}[x, \mathrm{A}, b]$ [2].

$$(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}+\alpha\,\mathrm{E})x^{\alpha}=\mathrm{A}^{\mathrm{T}}b. \tag{3}$$

3. Справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а 1. Пусть $x^{\alpha}\in R^n, x^{\alpha}\neq 0$ минимизирует функционал $\mathrm{M}^{\alpha}[x, A, b]$ и параметр регуляризации $\alpha \in \{\alpha\}$ $i=1, 2, \ldots$ выбирается по принципу невязки [3], тогда выполняется неравенство

$$\alpha\leqslant\alpha_b=\|\mathrm{A}\|^2\frac{\delta}{\|b\|-\delta}. \tag{4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из уравнения (3) $\alpha\mathrm{E}x^{\alpha}=\mathrm{A}^{\mathrm{T}}(b-\mathrm{A}x^{\alpha})$,

$$\alpha \leqslant \| A \| \frac{\| b - A x^\alpha \|}{\| x^\alpha \|}. \qquad (5)$$

Замечаем, что $\| x^\alpha \| \geqslant \frac{\| A x^\alpha \|}{\| A \|} \geqslant \frac{\| b \| - \| A x^\alpha - b \|}{\| A \|}$

и $\|b\| - \|Ax^\alpha - b\| > 0$, ибо в противном случае $M^\alpha[0, A, b] < M^\alpha[x^\alpha, A, b]$, что противоречит условию теоремы. Подставляя в (5) оценку снизу для x^α, получаем

$$\alpha \leqslant \| A \|^2 \frac{\| A x^\alpha - b \|}{\| b \| - \| A x^\alpha - b \|}.$$

Если параметр регуляризации выбирается из принципа невязки, то $\|Ax^\alpha - b\| \leqslant \delta$ и получаем (4).

Замечание: неравенство (4) дает начальное приближение при выборе параметра регуляризации α по принципу невязки.

4. Как указывалось в [4], где другим способом получено неравенство (4) для нормированных пространств и линейного ограниченного оператора A, оценка для α снизу через невязку без дополнительных предположений не существует, поэтому предлагается оценка при следующих предположениях.

Теорема 2. Если при некоторых значениях параметра α матрица $A^T A + \alpha E$ обусловлена лучше, чем матрица A системы (1) с числом обусловленности $k(A)$, то справедливо неравенство

$$\alpha > \alpha_н = \| A \|^2 \frac{1}{k(A)}. \qquad (6)$$

Доказательство. Обозначим характеристические числа матриц $A^T A + \alpha E$ и $A^T A$, расположенные в порядке невозрастания, соответственно $\{\gamma_s\}$, $\{\nu_s\}$, $s = 1, 2, \ldots, n$. Тогда $\gamma_1 = \nu_1 + \alpha$, $\gamma_n = \nu_n + \alpha$ ([5], стр. 103). Учитывая, что $k(A^T A + \alpha E) < k(A)$ по условию теоремы и $\|A\| = \sqrt{\nu_1}$, получаем (6).

5. При построении различных регуляризующих алгоритмов в [6] применяется функция, использующая спектр оператора $A^* A$ (A^* – оператор, сопряженный к A). Число обусловленности — $k(A^* A)$ непосредственно связано со спектром оператора $A^* A$. Интересно применение функции, характеризующей свойства оператора A, определенной на $[\alpha_н, \alpha_b]$, к исследованию поведения регуляризованных решений системы (3).

В качестве такой функции предлагается

$$f(\alpha) = \sqrt{k(A^T A + \alpha E)}.$$

Теорема 3. Функция $f(\alpha)$ определена на $[0, \infty]$ непрерывна, монотонно убывает и значения ее исчерпывают замкнутый интервал

$$[k(A), 1].$$

Доказательство следует из представления $f(\alpha)$ в виде

$$f(\alpha) = \sqrt{1 + \frac{\nu_1 - \nu_n}{\nu_n + \alpha}}.$$

и оценок (4) и (6).

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Тихонов. О некорректных задачах линейной алгебры и устойчивом методе их решения. Докл. АН СССР, 1965, т. 163, № 3, 591—594.

2. В. В. Воеводин. Журнал вычисл. математики и матем. физики, 1969, т. 9, № 3, 673—675.

3. В. А. Морозов. О решении функциональных уравнений методом регуляризации. Докл. АН СССР, 1966, т. 167. № 3, 510—512.

4. В. А. Винокуров. Два замечания о выборе параметра регуляризации. Журнал вычисл. матем. и матем. физики, 1972, т. 12, № 2, 481—483.

5. Дж. Уилкинсон. Алгебраическая проблема собственных значений. М., «Мир», 1970.

6. А. Б. Бакушинский. Один общий прием построения регуляризующих алгоритмов для линейного некорректного уравнения в гильбертовом пространстве. Журнал вычисл. матем. и матем. физики, 1967, т. 7, № 3, 672—677.