ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ
И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ. С. М. КИРОВА

Том 277 1977

НАИЛУЧШЕЕ РАВНОМЕРНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ $\overline{\varphi}(x)$ К ЗАДАННОЙ НЕПРЕРЫВНОЙ ФУНКЦИИ $f(x)$ НА ОТРЕЗКЕ $a \leqslant x \leqslant b$ И РАСЧЕТ НАИЛУЧШЕГО РАВНОМЕРНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ $\varphi(x)$

Б. Ф. КРУТОЙ

(Представлена научным семинаром кафедры инженерной и вычислительной математики)

1. Пусть $f(x)$ есть заданная непрерывная функция $f(x)$ на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$. Если функция $f(x)$ имеет очень сложный вид, то при расчете на ЦВМ целесообразно функцию $f(x)$ заменить на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ ее наилучшим равномерным приближением $\overline{\varphi}(x)$, выделенным из некоторого семейства $M(\varphi)$ функций $\varphi(x)$, непрерывных на $a \leqslant x \leqslant b$.

Нахождение искомой функции $\overline{\varphi}(x)$, наилучшим образом приближающей равномерно заданную функцию $f(x)$ на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$, равносильно требованию найти среди семейства $M(\varphi)$ непрерывных на $a \leqslant x \leqslant b$ функций $\varphi(x)$ такую $\overline{\varphi}(x)$, для которой наибольшее отклонение $\overline{\Delta}$.

$$\overline{\Delta} = \text{наиб.} |f(x) - \overline{\varphi}(x)|, \quad (a \leqslant x \leqslant b) \tag{1}$$

имеет наименьшее значение среди множества отклонений Δ_φ.

$$\Delta_\varphi = \text{наиб.} |f(x) - \varphi(x)|, \quad (a \leqslant x \leqslant b) \tag{2}$$

в соответствующем множестве функций $\varphi(x)$ из выбранного семейства $M(\varphi)$. Отсюда видно, что для заданной, непрерывной на $a \leqslant x \leqslant b$ функции $f(x)$ ее наилучшее равномерное на $a \leqslant x \leqslant b$ приближение $\overline{\varphi}(x)$, выделенное из взятого семейства $M(\varphi)$ функций $\varphi(x)$, непрерывных на $a \leqslant x \leqslant b$, может быть определено условием

$$\varepsilon = \overline{\Delta} = \text{наиб.} |f(x) - \varphi(x)| = \text{наим. из наиб.} |f(x) - \varphi(x)|, \quad (a \leqslant x \leqslant b) \tag{3}$$

где $\overline{\Delta} = \varepsilon$ — неизвестное нам наибольшее отклонение на $a \leqslant x \leqslant b$.

То же самое более кратко и так же точно может быть выражено на языке функционального анализа. Обозначим через $C(a, b)$ пространство функций $\chi(x)$, непрерывных на $a \leqslant x \leqslant b$, причем расстояние Δ_{ij} в этом пространстве $C(a, b)$ между двумя его функциями-векторами $\chi_i(x)$, $\chi_j(x)$ определим выражением

$$\Delta_{ij} = \text{наиб.} |\chi_i(x) - \chi_j(x). \quad (a \leqslant x \leqslant b) \tag{4}$$

Кроме того, условимся, что в пространстве $C(a, b)$ определены следующие 2 основных действия над входящими в него функциями-векторами $\varphi(x)=\varphi$, $\psi(x)=\psi$, $\vartheta(x)=\vartheta$:

$$1)\ \psi=\lambda\varphi, \quad 2)\ \vartheta=\lambda\varphi+\mu\psi, \tag{5}$$

где λ и μ — некоторые заданные числа.

Теперь поставленная выше задача о нахождении наилучшего равномерного приближения $\varphi(x)$ на отрезке $a\leqslant x\leqslant b$ для заданной, непрерывной на $a\leqslant x\leqslant b$ функции $f(x)$ может быть кратко и точно выражена так:

Для функции $f(x)\in C(a, b)$ найти такую функцию $\overline{\varphi}(x)$, $\varphi(x)\in M(\varphi)\subset C(a, b)$, чтобы для определенного семейства $M(\varphi)$ функций $\varphi(x)$ удовлетворялось условие (3) с неизвестным наибольшим отклонением $\overline{\Delta}=\varepsilon$:

$$\varepsilon=\overline{\Delta}=\text{наиб.}\,|f(x)-\overline{\varphi}(x)|=\text{наим. из наиб.}\,|f(x)-\varphi(x)|. \tag{3}$$

$$\overline{\varphi}(x)\in M(\varphi)\subset C(a,b) \quad \varphi(x)\in M(\varphi)\subset C(a,b).$$

$$(a\leqslant x\leqslant b)$$

Рассматриваемая задача была впервые поставлена и всесторонне исследована акад. П. Л. Чебышевым — доказательство существования, единственности и различных свойств наилучшего равномерного приближения $\overline{\varphi}(x)$ на $a\leqslant x\leqslant b$ к функции $f(x)$, непрерывной на $a\leqslant x\leqslant b$. Затем К. Вейерштрасс доказал, что для всякого $\varepsilon>0$ существует такой многочлен $P(x)$, что при всех $x\in[a, b]$ имеем

$$|f(x)-P(x)|<\varepsilon. \tag{6}$$

Наконец, Э. Борель установил существование на $a\leqslant x\leqslant b$ такого многочлена $P(x)$, для которого при некотором наибольшем отклонении ε

$$|f(x)-P(x)|=\varepsilon. \tag{7}$$

Однако эти ученые в своих исследованиях ограничивались теми двумя хотя и важными, но частными случаями, когда функция $\varphi(x)$ есть алгебраический или тригонометрический многочлен:

$$1)\ \overline{\varphi}(x)=\sum_{s=0}^{n} b_s x^s, \quad 2)\ \overline{\varphi}(x)=a_0+\sum_{\varkappa=1}^{n}(a_\varkappa\cos\varkappa x+b_\varkappa\sin\varkappa x). \tag{8}$$

Кроме того, этими учеными не были предложены какие-либо способы для расчета наилучшего равномерного приближения $\overline{\varphi}(x)$ в указанных двух случаях.

Более полно настоящая задача решена в книге [2]. В этой книге

а) дано доказательство существования и единственности функции $\overline{\varphi}(x)$, наилучшего равномерного приближения в любом семействе $M(\varphi)$ функций $\varphi(x)$ из $C(a, b)$;

б) рассмотрены исследования А. Хаара и А. Н. Колмогорова, посвященные обобщенным многочленам наилучшего равномерного приближения, и дана соответствующая расширенная теорема Чебышева для таких обобщенных многочленов;

в) указаны и обоснованы 2 способа последовательного приближения для построения функции $\overline{\varphi}(x)$ наилучшего равномерного приближения в том простейшем случае, когда $\overline{\varphi}(x)$ — обычный алгебраический многочлен вида (8.1).

Учитывая поэтому все, что уже сделано в данной области прикладной математики, мы поставим своей целью для некоторого выбранного нами семейства $M(\varphi)$ функций $\varphi(x)$ из $C(a, b)$ построить свод конечных уравнений, из которого может быть найдено искомое наилучшее равномерное приближение $\overline{\varphi}(x) \in M(\varphi)$ к заданной функции $f(x) \in C(a, b)$ и установлено соответствующее наибольшее отклонение $\overline{\Delta} = \varepsilon$.

2. Приступим к решению рассматриваемой задачи. С этой целью примем прежде всего, что взятое нами семейство $M(\varphi) \subset C(a, b)$ функций $\varphi(x) \in M(\varphi)$ обладает свойствами (4), (5) пространства $C(a, b)$ и является $(m+1)$-мерным подпространством Ω_{m+1}, входящим в $C(a, b)$. Таким образом,

$$1)\ f(x) \in C(a,b), \quad 2)\ \varphi(x) = \varphi_{m+1}(x) \in \Omega_{m+1} \subset C(a,b), \qquad (9)$$
$$3)\ \varphi(x) = \overline{\varphi}_{m+1}(x) \in \Omega_{m+1} \subset C(a,b).$$

Учитывая далее возможность выполнения в $\Omega_{m+1} \subset C(a, b)$ действий вида (4), (5), представим функцию $\varphi_{m+1}(x)$ наилучшего равномерного приближения к $f(x)$ в виде разложения

$$\overline{\varphi}_{m+1}(x) = \sum_{\nu=0}^{m} c_\nu \varphi_\nu(x) = \overline{\varphi}(x) \qquad (10)$$

по заданным $m+1$ опорным взаимонезависимым функциям $\varphi_\nu(x) \in \Omega_{m+1}$ и с неизвестными пока $m+1$ коэффициентами c_ν. Вставляя затем разложение (7) для $\overline{\varphi}_{m+1}(x) = \overline{\varphi}(x)$ в условие (3), получим

$$\varepsilon = \overline{\Delta} = \text{наиб.}\,|f(x) - \overline{\varphi}_{m+1}(x)| = \text{наим. из наиб.}\,|f(x) - \varphi_{m+1}(x)| =$$
$$[f(x) \subset C(a,b)].$$
$$[\overline{\varphi}_{m+1}(x) \in \Omega_{m+1} \subset C(a,b)]\,[\varphi_{m+1}(x) \in \Omega_{m+1} \subset C(a,b)].$$
$$(a \leqslant x \leqslant b).$$
$$= \text{наиб.}\,\Big|f(x) - \sum_{\nu=0}^{m} c_\nu \varphi_\nu(x)\Big|.$$
$$[\varphi_\nu(x) \in \Omega_{m+1} \subset C(a,b)]. \qquad (11)$$

Определяемую условием (11) функцию $\overline{\varphi}_{m+1}(x) = \overline{\varphi}(x)$ наилучшего равномерного приближения к заданной непрерывной на $a \leqslant x \leqslant b$ функции $f(x)$ найдем теперь, требуя, чтобы в некотором числе r точек x_s отрезка $a \leqslant x \leqslant b$ удовлетворялись r вытекающих из (7) равенств

$$\Big|\sum_{\nu=0}^{n} c_\nu \varphi_\nu(x_s) - f(x_s)\Big| = \varepsilon, \ (s = 1, 2, \ldots, r). \qquad (12)$$

Если предположить, что указанные r точек x_s отрезка $a \leqslant x \leqslant b$, в которых выполняется требование (12), нам уже известны, то определение оставшихся $m+2$ неизвестных $\varepsilon, c_0, c_1, \ldots, c_m$ из r равенств (12) будет возможно, принимая $r = m+2$.

Но указанные выше $r = m+2$ точки x_s отрезка $a \leqslant x \leqslant b$ нам все-таки наперед неизвестны. Поэтому для определения этих $m+2$ точек x_s мы учтем, что согласно (11)

$$\varepsilon = \text{наиб.} \left| \sum_{\nu=0}^{m} c_\nu \varphi_\nu(x) - f(x) \right|, [\varphi_\nu(x) \in \Omega_{m+1} \subset C(a,b)]. \tag{11}$$

Отсюда в предположении не только непрерывности, но и дифференцируемости функций $f(x)$, $\varphi^\nu(x)$ на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$, что почти всегда справедливо, мы получим по известному правилу еще $m+2$ равенств

$$\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}\right) = 0 = \left| \sum_{\nu=0}^{m} c_\nu \varphi'_\nu(x_s) - f(x_s) \right|, (s = 1,2,\ldots,m+2). \tag{13}$$

Объединяя, наконец, $m+2$ равенств (9) с $m+2$ равенствами (13), получим в итоге свод из $2m+4$ нелинейных уравнений с $2m+4$ неизвестными ε, c_0, c_1, ..., c_m, x_1, x_2, ..., x_{m+2}.

$$\begin{cases} 1) \left| \sum_{\nu=0}^{m} c_\nu \varphi_\nu(x_s) - f(x_s) \right| = \varepsilon. \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (s = 1.2,\ldots,m+2). \\ 2) \left| \sum_{\nu=0}^{m} c_\nu \varphi'_\nu(x_s) - f'(x_s) \right| = 0. \end{cases} \tag{14}$$

Решение свода из $(2m+4)$ нелинейных уравнений (14) может быть выполнено прежде всего одним из способов спуска [3]. Кроме того, если мы установили как-нибудь приближенные значения ε^0, c_ν^0, x_s^0 для $2m+4$ неизвестных ε, c_ν, x_s, то свод уравнений (14) может быть точно решен по способу Ньютона или каким-либо родственным ему способом [3]. Наконец, свод уравнений (14) можно решать путем наращивания — как последовательность сводов вида (14) при $m = 0, 1, 2, \ldots, N$, где $N+1$ — желаемое число членов в разложении (7) для $\overline{\varphi}_{m+1}(x)$.

Пример. Пусть $m=1$. Тогда $c_\nu = c_0$, c_1 и $x_s = x_1$, x_2, x_3. Поэтому свод $2m+4=6$ нелинейных уравнений (14) запишется в данном случае следующим образом:

$$\begin{aligned}
&1) \ |c_0\varphi_0(x_1) + c_1\varphi_1(x_1) - f(x_1)| = \varepsilon, \\
&2) \ |c_0\varphi_0(x_2) + c_1\varphi_1(x_2) - f(x_2)| = \varepsilon, \\
&3) \ |c_0\varphi_0(x_3) + c_1\varphi_1(x_3) - f(x_3)| = \varepsilon; \\
&4) \ |c_0\varphi'(x_1) + c_1\varphi'(x_1) - f'(x_1)| = 0, \\
&5) \ |c_0\varphi'(x_2) + c_2\varphi'(x_2) - f'(x_2)| = 0, \\
&6) \ |c_0\varphi'(x\ ) + c_2\varphi'(x_3) - f'(x_3)| = 0.
\end{aligned}$$

Здесь $f(x)$, $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ — заданные функции, а $\varepsilon > 0$, c_0, c_1 и x_1, x_2, $x_3 = x_s \ni [a, b]$ — неизвестные числа.

Приведенный пример наглядно показывает трудность расчета функции $\overline{\varphi}(x) = \varphi_{m+1}(x)$ наилучшего равномерного приближения к непрерывной на $a \leqslant x \leqslant b$ функции $f(x)$. Этим объясняется, почему вместо данного способа приближенного представления $\overline{\varphi}_{m+1}(x)$ для функции $f(x)$ применяют обычно более простые в расчетном отношении способы частичного совмещения и среднеквадратического приближения, которые определяются условиями [2]:

а) Способ частичного совмещения функций $\overline{\varphi}_{m+1}(x)$ и $f(x)$ в $m+1$ точках отрезка $a \leqslant x \leqslant b$:

$$1) \ \overline{\varphi}_{m+1}(x) = \sum_{\nu=0}^{m} c_\nu \varphi_\nu(x), \qquad (a \leqslant x \leqslant b), \tag{15}$$

2) $\varepsilon_s = \overline{\varphi}_{m+1}(x_s) - f(x_s) = \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu \varphi_\nu(x_s) - f(x_s) = 0, \ (s = 1, 2, \ldots, m+1),$

3) $\varphi_\nu(x), \overline{\varphi}_{m+1}(x) \in R_{m+1} \subset L$, где L — линейное пространство на $a \leqslant x \leqslant b$ [3].

б) Способ среднеквадратического с весом $p(x)$ приближения $\overline{\varphi}_{m+1}(x)$ к $f(x)$ на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$:

$$1)\ \overline{\varphi}_{m+1}(x) = \sum_{\nu=0}^{m} c_\nu \varphi_\nu(x), \quad 2)\ \overline{\varepsilon}(x) = \overline{\varphi}_{m+1}(x) - f(x),$$

$$3)\ [p(x)\overline{\varepsilon}(x), \overline{\varepsilon}(x)] = \int_a^b p(x)\,[\overline{\varphi}_{m+1}(x) - f(x)]^2 dx = \tag{16}$$

$$= Q^2 = \text{наим.} \int_a^b p(x)[\varphi_{m+1}(x) - f(x)]^2 dx,$$

где $\overline{\varphi}_{m+1}(x), \varphi_{m+1}(x) \in \overline{\Omega}_{m+1} \subset \breve{H}$, а $\overline{\Omega}_{m+1}$ — замкнутое $m+1$-мерное подпространство, входящее в полное гилбертово пространство $\breve{H}$ [3].

Заметим, что входящие в (15.1) и (16.1) функции $\varphi_\nu(x)$ являются m+1 опорными взаимонезависимыми функциями из соответствующих подпространств R_{m+1} и $\overline{\Omega}_{m+1}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. П. Натансон. Конструктивная теория функций. М.-Л., ГИТТЛ, 1949.
2. И. С. Березин и Н. П. Жидков. Методы вычислений. Т. 1, М., ИФМЛ, 1966.
3. Г. Е. Шилов. Математический анализ, специальный курс. М., Физматгиз, 1960.