ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ
И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ. С. М. КИРОВА

Том 277 1977

РЕШЕНИЕ НА ЦВМ КОНЕЧНОГО ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ $Ax=\Theta$ СПОСОБОМ НЕПРЕРЫВНОГО КРАТЧАЙШЕГО СПУСКА

Б. Ф. КРУТОЙ

(Представлена научно-техническим семинаром кафедры прикладной математики и учебно-вычислительной лаборатории)

Решение уравнения

$$Ax=\Theta \tag{1}$$

с заданным, нелинейным вообще, конечным оператором A, нулевым $\Theta=(0^1, 0^2, \ldots, 0^n)$ и искомым $x=(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ векторами выполняется на ЦВМ обычно способами ломаного спуска [1], алгоритмы которых довольно сложны и не всегда обладают достаточно хорошей сходимостью. Между тем, подобного рода задачи давно уже решаются приближенно на АВМ путем приведения их к обыкновенным дифференциальным уравнениям с независимым временем t [2]. Поэтому в настоящей статье для решения того же конечного уравнения (1) будет рассмотрен более простой и более надежный способ не ломаного, а непрерывного кратчайшего спуска. Предлагаемый способ кратчайшего спуска, выполняемый на ЦВМ, несколько напоминает известные способы решения уравнения (1) на АВМ, но отличается от них более высокой точностью и требует вблизи корня x перехода на способ Ньютона. Сущность способа непрерывного кратчайшего спуска заключается в следующем.

Подставим в уравнение (1) вместо искомого $x=(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ произвольный вектор $\xi=(\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n)$. Тогда уравнение (1) примет вид

$$A\xi=r, \tag{2}$$

где $r=(r^1, r^2, \ldots, r^n)$ — вектор невязки. Образуем затем положительно-определенный функционал $\Phi(\xi)$

$$\Phi(\xi)=(A\xi, A\xi)=(r, r)\geqslant 0, \tag{3}$$

который обращается в 0 при $\xi=x$. Если в этом соотношении произвольный вектор $\xi=(\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n)$ заменить заданным вектором $\xi_0=(\xi_0^1$ $\xi_0^2, \ldots, \xi_0^n)$, то равенство

$$\Phi=\Phi(\xi)=\Phi(\xi_0)=\Phi_0=(r_0, r_0), \tag{4}$$

где $r=(r_0^1, r_0^2, \ldots, r_0^n)$, даст уравнение уровенной поверхности, проходящей через точку $M_0=M(\xi_0)$ геометрического пространства $D^{(n)}$.

Проведем теперь через произвольную точку $M=M(\xi)$ уровенной поверхности $\Phi=\Phi_0$ касательную плоскость и поверхностную нормаль. Пусть $d\overline{r}=d\xi^i\,\overline{e_i}$ есть произвольное конечно малое смещение из указанной точки M, лежащее в касательной плоскости. Тогда справедливо условие

$$\overline{N}\odot d\overline{r}=0, \tag{5}$$

выражающее взаимопоперечность поверхностной нормали $\overline{N}$ и касательного смещения $d\overline{r}$. Если поверхностную нормаль $\overline{N}$ зададим разложением $\overline{N}=N_\lambda\overline{e^\lambda}$, то условие (5) примет вид

$$\overline{N}\odot d\overline{r}=N_\lambda\overline{e^\lambda}\odot d\,\xi^i\overline{e_i}=N_\lambda d\,\xi^i(\overline{e_\lambda}\odot\overline{e^i})=N_i d\,\xi^i, \tag{5*}$$

где мы учли основоположное в тензорном анализе соотношение

$$\overline{e_\lambda}\odot\overline{e^i}=\delta^i_\lambda=\begin{cases}+1, \text{ если } \lambda=i,\\ 0, \text{ если } \lambda\neq i.\end{cases} \tag{6}$$

С другой стороны, так как левая часть равенства (4) $\Phi(\xi)=\Phi(\xi_0)$ не меняется при подстановке в правую часть различных чисел $\Phi(\xi_0)$, то от обеих частей этого равенства можно взять полный дифференциал d и мы получим

$$d\Phi=\frac{\partial\Phi}{\partial\xi^s}d\,\xi^s=d\Phi_0=0. \tag{7}$$

Сравнение (5*) и (7) показывает, что

$$N_s=\frac{\partial\Phi}{\partial\xi^s}. \tag{8}$$

Отсюда вытекает следующая уточненная запись условия (5):

$$\overline{N}\odot d\overline{r}=\frac{\partial\Phi}{\partial\xi^s}d\,\xi^s=0. \tag{5**}$$

Составим далее векторное дифференциальное уравнение нормали $\overline{N}$ к уровенной поверхности $\Phi(\xi)=\Phi(\xi_0)$ в произвольной точке $M(\xi)$ этой поверхности. Если через dr мы обозначим теперь конечно малое смещение из указанной точки $M(\xi)$, направленное вдоль нормали $\overline{N}$, то получим следующее векторное уравнение этой нормали

$$\overline{N}=N_s\overline{e^s}=\frac{\partial\Phi}{\partial\xi^s}\overline{e^s}=\mu\,d\overline{r}=\mu\,d\,\xi^i\overline{e_i}, \tag{9}$$

где μ — произвольный числовой множитель. Чтобы перейти отсюда к соответствующим дифференциальным уравнениям в составляющих N_s $d\xi^i$ и получить наиболее простой вид таких уравнений, предположим, что вектор ξ задан в декартовых прямоугольных координатах. Тогда

$$1)\ \overline{e_i}=\overline{\varepsilon}_i=\overline{\varepsilon}^i=\overline{e^i},\quad 2)\ d\overline{r}=d\,\xi^i\overline{e_i}=d\,\xi_i\overline{e^i},\quad 3)\ d\,\xi^i=d\,\xi, \tag{10}$$

$$4)\ \omega_{\alpha\beta}=\bar{\varepsilon}_\alpha \odot \bar{\varepsilon}_\beta=\bar{\varepsilon}^\alpha \odot \bar{\varepsilon}^\beta=\omega^{\alpha\beta}=\begin{cases}\omega_{\alpha\alpha}=\omega^{\alpha\alpha}=+1, & \text{если } \beta=\alpha,\\ 0, & \text{если } \beta\neq\alpha.\end{cases}$$

Отсюда с учетом соотношения $N_s=\partial\Phi/\partial\xi^s$ найдем следующее представление векторного уравнения (9) в составляющих N_s, $d\xi^i$.

$$1)\frac{\partial\Phi}{\partial\xi^s}=\varphi_s(\xi),\quad 2)\ \frac{\varphi_1(\xi)}{d\xi^1}=\frac{\varphi_2(\xi)}{d\xi^2}=\cdots=\frac{\varphi_n(\xi)}{d\xi^n}=\mu. \tag{11}$$

В цепи из n звеньев (10.2) примем ξ^1 в качестве независимого переменного, а остальные $n-1$ переменных ξ^s будем считать зависимыми. Тогда мы придем к следующему своду из $n-1$ дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{d\xi^s}{d\xi^1}=\frac{\varphi_s(\xi)}{\varphi_1(\xi)}=\psi_s(\xi),\quad (s=2,3,\dots,n), \tag{12}$$

определяющих направление нормали $\bar{N}$ в произвольной точке $M(\xi)$ уровенной поверхности $\Phi(\xi)=\Phi(\xi_0)$.

Предположим теперь, что в геометрическом пространстве $D^{(n)}$ мы построили непрерывное множество вложенных друг в друга уровенных поверхностей $\Phi_i(\xi)=\Phi(\xi_i)$, $(i=0, 1, 2, \dots)$, проходящих через выбранные точки $M_i=M(\xi_i)$ пространства $D^{(n)}$ и удовлетворяющих условию $\Phi_i(\xi)>\Phi_{i+1}(\xi)$. В таком случае задача Коши

$$1)\frac{\partial\Phi(\xi)}{\partial\xi^s}=\varphi_s(\xi),\quad 2)\frac{d\xi^s}{d\xi^1}=\frac{\varphi_s(\xi)}{\varphi_1(\xi)}=\psi_s(\xi), \tag{13}$$

$$3)\ (\xi^s)_{\xi^1=\xi^1_0}=\xi^s_0.$$

определяет некоторую непрерывную нить $H_0^{(n)}$ в $D^{(n)}$, которая проходит через выбранную начальную точку $M_0=M(\xi_0)$ пространства $D^{(n)}$ и пронизывает поперечно каждую поверхность $\Phi_i(\xi)=\Phi(\xi_i)$ из указанной выше непрерывной их совокупности, подчиненной условию $\Phi_i(\xi)<$ $<\Phi_{i+1}(\xi)$. Удовлетворяющую таким условиям непрерывную нить $H^{(n)}$ в $D^{(n)}$ назовем нитью кратчайшего непрерывного спуска. Мы можем даже принять, что точки $M_i=M(\xi_i)$ вложенных уровенных поверхностей $\Phi_i(\xi)=\Phi(\xi_i)$ расположены как раз на искомой нити $_0^{(n)}$ кратчайшего непрерывного спуска. Этим замечанием мы воспользуемся далее.

Из приведенной нами цепи рассуждений теперь уже становится как будто ясным, что отыскание корней x уравнения (1)

$$Ax=\Theta$$

может быть сведено к решению более простой (при выполнении на ЦВМ) задачи Коши для различных начальных точек $M_0=M(\xi_0)$. Выбрав одну такую начальную точку M_0, мы строим по точкам сечения M_i выходящую из M_0 нить $H_0^{(n)}$ кратчайшего непрерывного спуска, подсчитывая каждый раз соответствующее значение $\Phi(\xi_i)$. Та точка $M=M_k=M(\xi_k)$, для которой $\Phi(\xi_k)\approx 0$, будет одним из корней x уравнения (1).

В том же случае, когда вместо точки $M(\xi_k)$ с отметкой $\Phi(\xi_k)\approx 0$ мы попадаем в яму с отметкой дна $\Phi(\xi_k)>0$, нужно выбрать в качестве начальной $M_0=M(\xi_0)$ некоторую другую точку, с которой начинаем новый непрерывный спуск по кратчайшему пути.

Решение задачи Коши (13) мы производим, конечно, численным способом с некоторым шагом $h=d\xi^1$. Однако мы не получим таким путем точных значений ξ_k для корней x уравнения (1) за конечное число шагов. Вызвано это тем, что для корня $x=\xi_k$ функционал $\Phi(\xi)_{\xi=x}=0$, и потому в (13)

$$1)\ \frac{\partial \Phi(\xi_k)}{\partial \xi^s}=\varphi_s(\xi_k)=0, \quad 2)\ \psi_s(\xi_k)=\frac{\varphi_s(\xi_k)}{\varphi_1(\xi_k)}=\frac{0}{0}. \tag{14}$$

Следовательно, вблизи корня $\xi_k=x$ правые части $\psi_s(\xi_k)$ уравнений (13.2) становятся неопределенными. Поэтому, как только для некоторого ξ_i функционал $\Phi(\xi_i)$ становится достаточно малым, например $\Phi(\xi_i)=$ $=0.5—0.7$, нужно переходить на способ Ньютона. Отсюда вытекает, что, численное решение задачи Коши (13) можно выполнять с крупным шагом $h=d\xi^1$, применяя способ Эйлера или упрощенный способ Рунге-Кутта второго порядка точности.

Что касается частного вида решаемого уравнения $Ax=\Theta$, то это может быть или одно уравнение $f(z)=0$, или свод таких уравнений

$$f_i(z_1,z_2,\ldots,z_n)=0, \ (i=1,2,\ldots, n).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Э. Д. Бут. Численные методы. М., ГИФМЛ, 1959.

2. В. Б. Смолов и др. Вычислительные машины непрерывного действия. М., «Высшая школа», 1964.