ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО
Том 101 ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА 1958 г.

АНАЛИЗ ПРОГРЕВА ТЕЛ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ЛУЧИСТОГО ТЕПЛА НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ ПОДОБИЯ

Г. П. БОЙКОВ

Представлено профессором ФУКС Г. И.

Для того, чтобы выявить критерии, характерные для процесса прогрева тел под действием лучистого тепла, воспользуемся следующей системой уравнений:

1. Дифференциальное уравнение теплопроводности

$$\frac{d\lambda}{dT}\left[\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2\right]+\lambda\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=\frac{\partial T}{\partial \tau}\cdot\left(T\frac{dc}{dT}+c\right)^* \tag{1}$$

2. Начальное условие:

$$T=T_0 \text{ при } \tau=0 \tag{2}$$

3. Условие на поверхности:

$$\sigma\left[\left(\frac{T_c}{100}\right)^4-\left(\frac{T_n}{100}\right)^4\right]=\lambda\frac{\partial T_n}{\partial x} \tag{3}$$

4. Условие, характеризующее свойства вещества:

$$\lambda=f_\lambda(T;\,T_0;\,\lambda_0);\ c=f_c(T;\,T_0;\,c_0) \tag{4}$$

При этом выражения (4) считаются инвариантными по отношению к масштабным преобразованиям.

Приведем теперь системы (1) ÷ (4) к безразмерному виду, для чего введем масштабные преобразования:

$$x=l^*X;\ T=T^*\Theta;\ \lambda=\lambda^*\Lambda;\ c=c^*\cdot C;$$
$$T_0=T^*\Theta_0;\ \sigma=\sigma^*\cdot\Sigma;\ T_c=T^*\cdot\Theta_c;\ T_n=T^*\cdot\Theta_n;$$
$$\lambda_0=\lambda^*\cdot\Lambda_0;\ c_0=c^*\cdot C_0;\ \tau=\tau^*\mathrm{T} \tag{a}$$

Подставим написанные соотношения в систему (1) ÷ (4). Так как условие (2) уравнений связи не дает, а условия (4) инвариантны к вводимым масштабным преобразованиям, то будем иметь:

$$\frac{\lambda^*T^*}{l^{*2}}\cdot\frac{d\Lambda}{d\Theta}\cdot\left(\frac{\partial\Theta}{\partial X}\right)^2+\frac{\lambda^*\cdot T^*}{l^{*2}}\cdot\Lambda\cdot\frac{\partial^2\Theta}{\partial X^2}=\frac{T^*C^*}{\tau^*}\cdot\frac{\partial\Theta}{\partial\mathrm{T}}\cdot\left(\Theta\frac{dC}{d\Theta}+C\right)$$

$$\sigma^*\cdot T^{*4}\Sigma\left[\left(\frac{\Theta_c}{100}\right)^4-\left(\frac{\Theta_n}{100}\right)^4\right]=\frac{\lambda^*T^*}{l^*}\cdot\Lambda\cdot\frac{\partial\Theta_n}{\partial X} \tag{n}$$

Для того, чтобы система (n) соответствовала законам физики для безразмерных величин, необходима следующая очевидная связь между масштабами:

* См. [I].

$$\frac{\lambda^*}{l^{*2}} = \frac{c^*}{\tau^*}; \qquad \frac{\lambda^*}{l^*} = \sigma^* \cdot T^{*3} \tag{m}$$

Уравнения (m) включают 6 масштабов. Следовательно, можно произвольно задать 4 масштаба, а остальные два определить из уравнений связи (m).

Учитывая, что размерности произвольно выбираемых масштабов должны быть независимыми, а в качестве масштабов следует выбирать лишь параметры, входящие в систему уравнений, описывающих процесс, задаемся такими четырьмя масштабами:

$$l^* = R; \ T^* = T_c; \ \lambda^* = \lambda_0; \ c^* = c_0 \tag{б}$$

Подставляя выбранные масштабы в уравнения связи (m), найдем:

$$\tau^* = \frac{R^2 c_0}{\lambda_0}; \quad \sigma^* = \frac{\lambda_0}{R \cdot T_c^3} \tag{в}$$

Для нахождения критериев подобия, воспользуемся соотношениями (a); $(б)$; $(в)$. Находим:

$$X = \frac{x}{R}; \ \Theta = \frac{T}{T_c}; \ \Lambda = \frac{\lambda}{\lambda_0}; \ C = \frac{c}{c_0};$$

$$\Theta_0 = \frac{T_0}{T_c}; \ \Theta_n = \frac{T_n}{T_c}; \ \sum = \frac{\sigma \cdot R \cdot T_c^3}{\lambda_0};$$

$$\mathrm{T} = \frac{\tau \cdot \lambda_0}{c_0 R^2}; \ \Theta_c = 1; \ \Lambda_0 = 1; \ C_0 = 1$$

Решение системы:

$$\frac{d\Lambda}{d\Theta}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial X}\right)^2 + \Lambda \cdot \frac{\partial^2\Theta}{\partial X^2} = \frac{\partial\Theta}{\partial \mathrm{T}} \cdot \left(\Theta \frac{dC}{d\Theta} + C\right) \tag{1a}$$

$$\Theta = \Theta_0 \text{ при } \mathrm{T} = 0 \tag{2a}$$

$$\sum\left[\left(\frac{\Theta_c}{100}\right)^4 - \left(\frac{\Theta_n}{100}\right)^4\right] = \Lambda \frac{\partial\Theta_n}{\partial X} \tag{3a}$$

$$\Lambda = f_\lambda(\Theta; \ \Theta_0); \ C = f_c(\Theta; \ \Theta_0) \tag{4a}$$

представится в виде:

$$\frac{T}{T_c} = f\left(\frac{x}{R}; \frac{\tau\lambda_0}{c_0 R^2}; \frac{\lambda}{\lambda_0}; \frac{c}{c_0}; \frac{\sigma \cdot R T_c^3}{\lambda_0}; \frac{T_0}{T_c}; \frac{T_n}{T_c}\right). \tag{5}$$

Критерий подобия можно преобразовать. Например, критерий $\sum = \frac{\sigma \cdot T_c^3 \cdot R}{\lambda_0}$ можно представить в форме критерия Кирпичева:

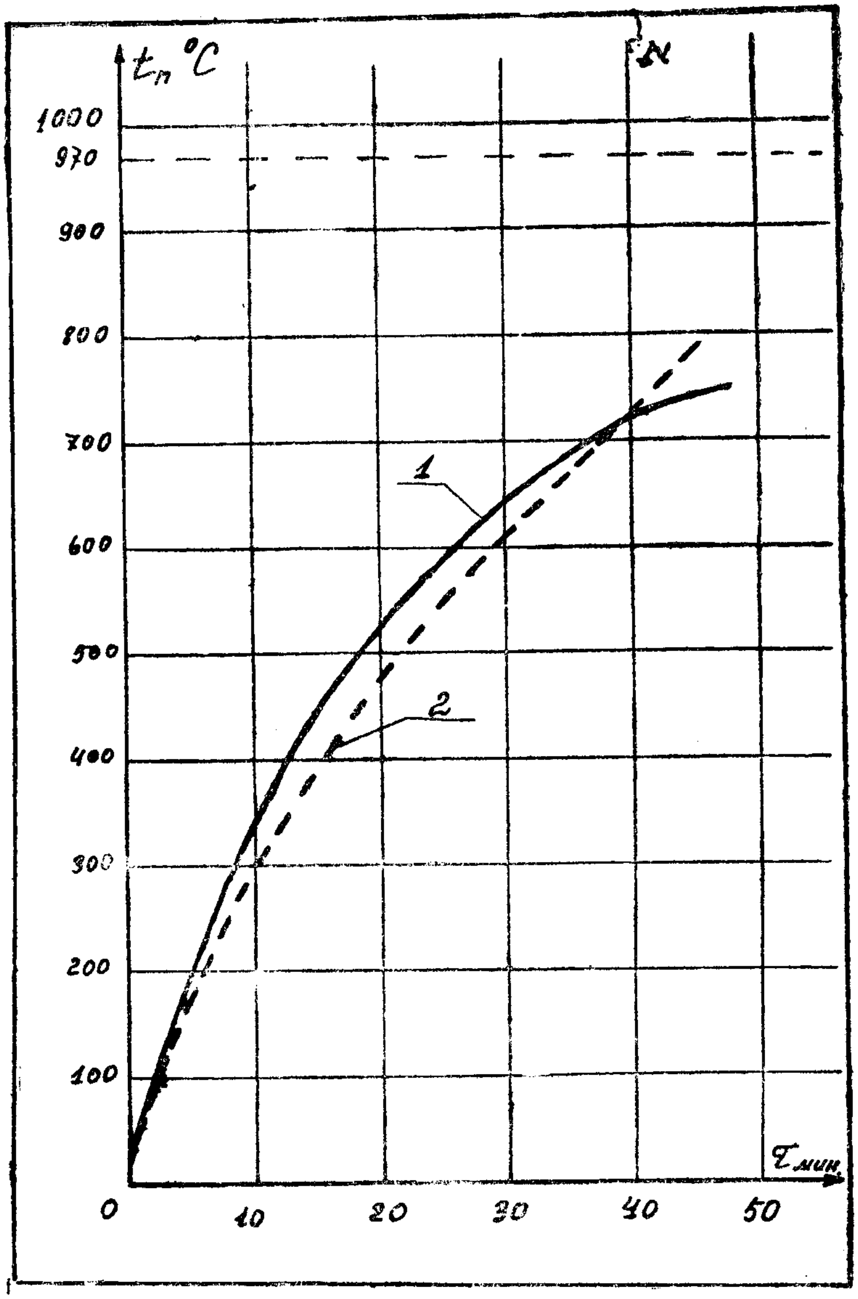
$$\frac{g_c \cdot R}{\lambda_0 \cdot T_c} = K_i,$$

критерий $\Theta_n = \frac{T_n}{T_c}$ в форме:

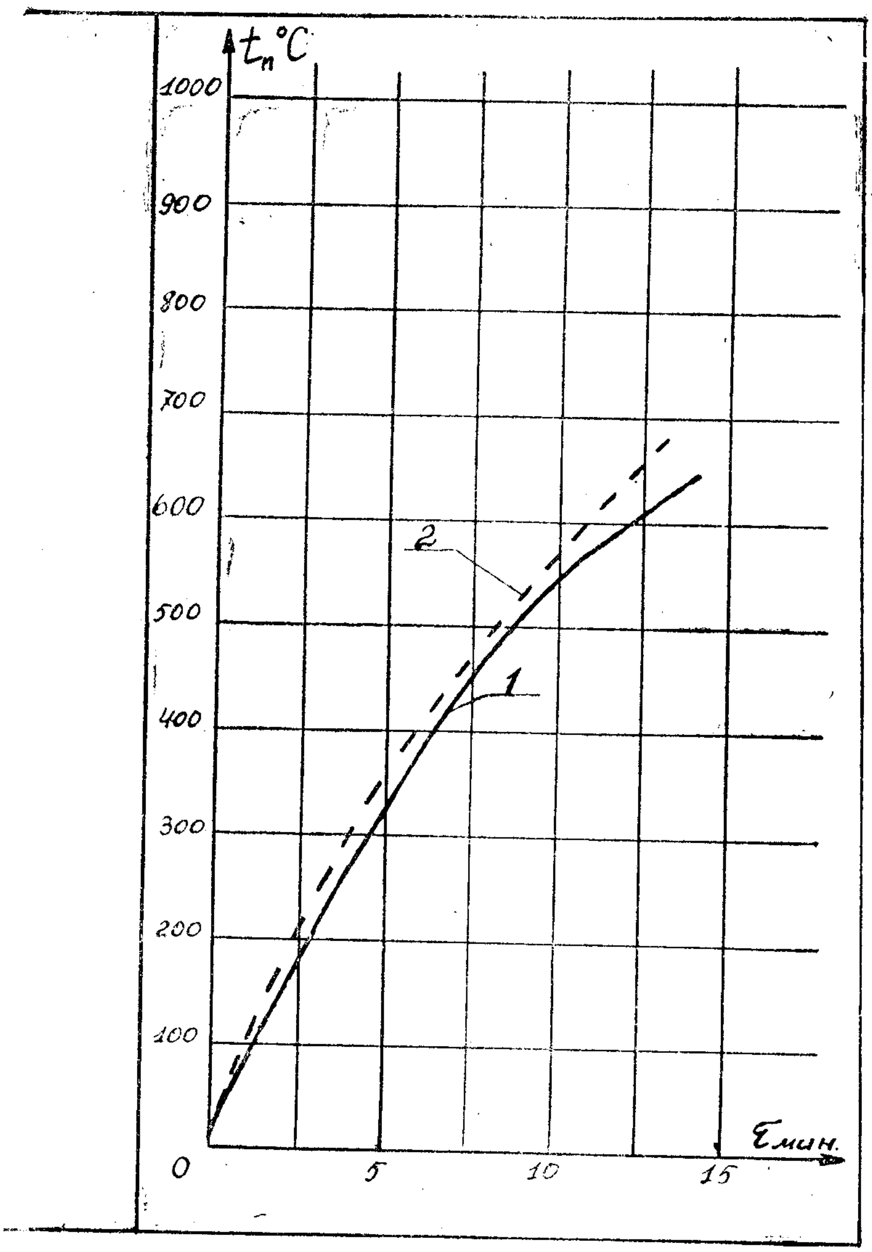
$$\frac{\sigma}{\sigma} \cdot \left(\frac{T_n}{T_c}\right)^4 = \frac{g_{cn}}{g_c} \text{ или } Q_{ci} = 1 - \frac{g_{cn}}{g_c} = \frac{g_{ci}}{g_c} \text{ и т. д.}$$

Тогда (5) перепишется так:

$$\Theta = f(X; \ F_0; \ \Lambda; \ C; \ K_i; \ \Theta_0; \ Q_{ci}) \tag{5'}$$



Фиг. 1. Прогрев цилиндра из стали 9Х диаметром 300 мм:
1. Изменение температуры на поверхности по данным опыта [2].
2. Изменение температуры на поверхности при тех же условиях, построенное по формуле (8).



Фиг. 2. Прогрев цилиндра из шарикоподшипниковой стали диаметром 125 мм:
1. Изменение температуры на поверхности по данным опыта [3].
2. Изменение температуры на поверхности при тех же условиях, построенное по формуле (8).

В связи с тем, что

$$Q_{ci} = \varphi(K_i;\ F_0;\ \Theta_0;\ \Lambda;\ C)$$

соотношение (5′) можно упростить:

$$\Theta = f(X;\ F_0;\ \Lambda;\ C;\ K_i;\ \Theta_0) \tag{6}$$

Последнее находится в согласии с П-теоремой, согласно которой число критериев комплексов равно

$$n - k = 6 - 4 = 2,$$

а число критериев симплексов:

$$N - n = 11 - 6 = 5.$$

Здесь N — общее число величин, входящих в систему (1) ÷ (4):

$$(\lambda;\ T;\ x;\ \tau;\ c;\ T_0;\ \sigma;\ T_c;\ T_n;\ \lambda_0;\ c_0),$$

n — общее число масштабов с неодинаковыми размерностями:

$$(T;\ \tau;\ x;\ \lambda;\ c;\ \sigma)$$

k — число масштабов с независимыми размерностями:

$$(R;\ T_c;\ \lambda;\ c_0)$$

Для одинаковых материалов и сходственных точек пространства получим:

$$\Theta = f(\Theta_0;\ K_i;\ F_0). \tag{7}$$

Анализ зависимости (7) подтверждает правильность ее представления. Так, например, для поверхности стального бесконечного цилиндра в пределах изменения комплекса $\Theta_o^2 + 2K_i F_0$ от 0 до 0,5 зависимость (7) достаточно удовлетворительно подтверждается выражением:

$$\Theta_n = [\Theta_0^2 + 2K_i \cdot F_0]^{0,5} \tag{8}$$

На фиг. 1 и 2 показаны кривые изменения температуры поверхности стального цилиндра. Кривые (1) построены по данным опыта [2] ÷ [3]. Кривые (2) — по формуле (8).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Прогрев тел под действием лучистого тепла при переменных теплофизических характеристиках вещества описывается двумя критериями комплексами и пятью критериями симплексами [выражение (6)].

2. Для одних и тех же материалов качественная зависимость (7) остается одной и той же как для процессов с переменными, так и для процессов с постоянными [4] теплофизическими характеристиками. В количественном отношении влияние изменения теплофизических характеристик может быть учтено эмпирическими коэффициентами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Эйгенсон Л. С.— Моделирование, М., 1952, ГИ «Советская наука».

2. Дегтярев В. М.— Скоростной нагрев при термической обработке изделий крупных сечений. К.— М., 1953, Машгиз.

3. Немчинский А. Л.— Тепловые расчеты термической обработки, Судпромгиз, 1953.

4. Иванцов Г. П.— Анализ подобия нагрева металла в муфельной печи, Сборник «Промышленные печи», Металлургиздат, 1953.