

ПРЯМОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОДНОЙ ЗАДАЧИ СТОХАСТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В. В. ЗАХАРОВ, В. Г. СМЕРНОВА

(Представлена научным семинаром лаборатории вычислительной техники
и автоматизации НИИ ЯФ ЭА)

В работе [1] была рассмотрена задача оптимального управления статическим объектом при наличии ограничений на качество управления. Эту задачу оказалось возможным поставить и решить как задачу стохастического программирования. При определенных предположениях последняя сводится к задаче линейного детерминированного программирования. В настоящей работе для более общего случая предлагается специальный метод решения посредством моделирования движения к ограниченному минимуму в условиях помех. На этом этапе решения задачи находит применение метод интегрального сглаживания, описанный в [2]. Методика интегральной идентификации позволяет также строить линейную модель оптимизируемого объекта и проводить ее коррекцию во времени по результатам нормальной его эксплуатации. В принципиальном отношении здесь, однако, не будет ничего нового по сравнению с методом регрессионного анализа, применяемого обычно для этих же целей. Поэтому вопрос идентификации конкретного объекта здесь не рассматривается. Стоит все же отметить, что применение фактически одной и той же программы для идентификации объекта и отыскания оптимальных условий его функционирования, несомненно, заманчиво в условиях применения ЭВМ с малым объемом памяти.

1. Постановка задачи

Особенностью некоторых объектов автоматического управления является ограниченная возможность фиксации управляемых переменных. В особенности это относится к химическим производствам.

Пусть объект функционирует в статическом режиме и целью управления является достижение минимума некоторой функции $F(\vec{x})$. При этом объект не должен нарушать некоторые производственные режимы, задаваемые неравенствами $f_j(\vec{x}) \geq 0, j \in J, = \{1, 2, \dots, m\}$. Задача оптимального управления таким объектом формулируется следующим образом: найти

$$\min_x \{F(\vec{x}) / f_j(\vec{x}) \geq 0, j \in J\}, \quad (1)$$

где

$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ — вектор переменных, с помощью которых возможно управлять объектом (управляемые переменные).

Особенностью оптимального управления химико-технологическими процессами является частичная управляемость переменных x_i . Так, при автоматизации целлофанового производства Барнаульского химкомбината отклонение фактического значения x_i от номинально устанавливаемого достигало 30—40%. Вследствие этого, имеет смысл говорить о вероятностной форме постановки задачи (1):

$$E[\min_x \{F(\mathbf{x}) | P[f_j(\mathbf{x}) \geq 0] \geq \alpha_j, j \in J\}], \quad (2)$$

где

$0 < \alpha_j < 1$; E, P — символы математического ожидания и вероятности соответственно.

Постановка задачи в таком общем виде вызывает большие трудности ее численного решения. Поэтому обычно переходят к видоизмененной постановке:

$$\min_x \{E[F(\mathbf{x})] | P[f_j(\mathbf{x}) > 0] \geq \alpha_j, j \in J\}, \quad (3)$$

хотя последний имеет, очевидно, приближенный характер. Обзор методов стохастического программирования дан в [3].

В том случае, когда вид функций F, f_j линейный, а переменные x_i распределены нормально, удалось свести (3) к задаче детерминированного линейного программирования в более узкой, нежели исходная, области [1]:

$$\min_{E(\mathbf{x})=\bar{\mathbf{x}}} \left\{ \sum_{i=1}^n c_i \bar{x}_i \mid \sum_{i=1}^n a_{ij} \bar{x}_i \geq \Phi^{-1}(\alpha_j) \sqrt{\sum_{i=1}^n a_{ij}^2 \sigma_{x_i}^2} \right\}, \quad (4)$$

где

Φ — интегральная функция распределения Гаусса,
 $\sigma_{x_i}^2$ — дисперсия случайной величины x_i .

Если управляющие переменные x_i имеют произвольные распределения (в конкретном случае управления целлофанового производства распределения x_i были заданы гистограммами), то единственным путем решения (2), (3) остается путь прямого моделирования.

2. Исходные предпосылки моделирования

Рассмотрим один метод прямого решения задачи (2), (3), заключающийся в моделировании процесса поиска. При моделировании решения задачи стохастического программирования (будем впредь для краткости говорить: «стохастической программы») в значительной степени безразличен вид задания плотностей случайных величин x_i (это может быть как аналитическое выражение, так и гистограммы). Плотность распределения величин $f_j(\mathbf{x})$ (обозначим ее $\varphi_j(f)$) может быть не заданной априорно, а получаться в процессе моделирования. Функции $F(\mathbf{x}), f_j(\mathbf{x})$ могут иметь нелинейный вид.

Принципиально при моделировании можно получить сколь угодно точное решение задачи, правда, ценой огромного количества вычислений. Очевидный факт, однако, состоит в том, что практические потребности вряд ли таковы, что нам стоит добиваться решения с большой точностью. Ведь мы рассматриваем вариант, когда даже плотности распределения $\varphi_j(f)$ заданы настолько грубо, что нет смысла искать их аналитический вид.

Имеется еще одно обстоятельство, которое в нашем случае способствует существенному уменьшению испытаний при реализации модели поиска. Заключается оно в том, что мы можем рассматривать задачу (2), т. е. более общую задачу, нежели (3) и, следовательно, можем рассчитывать на более экономичное решение. В то же время в процессе поиска нет необходимости искать $E[\min F(\vec{x})]$, а можно ограничиться поиском $\min E[F(\vec{x})]$ на каждой итерации. Можно надеяться, что возникающая при этом погрешность будет компенсирована на последующих итерациях. Результат же решения на каждой итерации не имеет для нас экономического смысла, так как по терминологии [3] в постановках (2), (3) мы имеем дело с одноэтапной задачей стохастического программирования. Поэтому соблюдение адекватности постановки (2) и отыскание на отдельной итерации $E[\min_x F(\vec{x})]$ имеет смысл производить лишь на заключительных этапах поиска. С учетом этого обстоятельства и была построена схема моделирования задачи в постановках (2), (3).

Введем некоторые определения и сделаем замечания, поясняющие предпосылки и составные части алгоритма моделирования, который будет приведен ниже.

А. Пусть распределения компонент вектора $\vec{x}$ заданы гистограммами. Будем моделировать случайную величину x_i в соответствии с заданной гистограммой. Будем обозначать центр испытаний на k -й итерации процесса моделирования через $\vec{x}^k$, реализация векторов через $\vec{x}^l$ ($l=1, 2, \dots, v_k$). Точку $\vec{x}^k$ назовем стохастически допустимой, если выполняется неравенство $\mu_{kj}/v_k \geq \alpha_j$, где v_k — общее количество точек $\vec{x}^{kl}, \mu_{kj}$ — число точек, не нарушивших неравенства $f_j(\vec{x}) \geq 0$.

Б. Обозначим через Y_d множество допустимых точек исходной детерминированной программы. Кратко этот факт будем записывать в виде

$$Y_d = \{\vec{x} \mid f_j(\vec{x}) \geq 0, j \in J\}.$$

Пользуясь этой символикой, множество стохастически допустимых точек можно обозначить

$$Y_{st} = \{\vec{x} \mid P[f_j(\vec{x}) \geq 0] \geq \alpha_j, j \in J\}.$$

Введем множество

$$Y_d^* = \{\vec{x} \mid f_j(\vec{x}) - \delta \geq 0, j \in J\}.$$

В [4] аналогичное множество вводится для устранения заикливания процесса. В нашем случае оно необходимо также и для того, чтобы уменьшить количество проверок на стохастическую допустимость точек

$\vec{x}^{kl}$, что убыстрит сходимость процесса вдали от границ области Y_{st} . Величина δ может быть взята предварительно кратной средней (или наибольшей) дисперсии переменных x_i , например, $\delta = 3\sigma_{\max}$. Можно также положить

$$\delta_1 = \max_{j \in J} f_j(\vec{x}^0), \delta_2 = \min_{j \in J} f_j(\vec{x}^0), \delta = (\delta_1 + \delta_2)/2.$$

В. Подобно тому, как это делается в [4], стохастически возможным направлением будем считать такое направление s^k в точке $\vec{x}^k$, что $\vec{x}^k + \vec{s}^k \lambda \in Y_{st}$ и $\lambda > 0$. Если вдоль этого направления значение функции $F(\vec{x})$ убывает, то оно является стохастически подходящим.

Г. Обозначим через Θ метод моделирования задачи (2), (3) в целом. Тогда метод Θ будет состоять из набора моделирующих правил Θ_q в количестве Q , что будем обозначать так: $\Theta = (\Theta_1, \dots, \Theta_Q)$. Можно рассмотреть несколько методов Θ , предназначенных для того или иного вида задания плотности распределения случайных величин x_i и вариантов постановок (2), (3). Рассмотрим в настоящей работе два из них, имеющих универсальный характер.

Рассмотрим теперь схему моделирования задачи (2) в общих чертах, а затем детализируем ее. Основой метода Θ является правило Θ_1 — выбора направления убывания функции цели $F(\vec{x})$ в области Y_{st} , т. е. стохастически подходящего направления. Движение вдоль этого направления рано или поздно должно сделать точку $\vec{x}^{k+1}$ стохастически недопустимой. На этот случай предусмотрено воздействие правила Θ_2 «рикошета» от границы Y_{st} внутрь области.

Последним правилом Θ_3 в предлагаемом алгоритме является правило окончания вычислений. Так как заранее известно, что при моделировании возможно получать лишь приближенное решение задачи, то правило Θ_3 рекомендует прекращать вычисление в тот момент, когда произошло «зацикливание» процесса решения, т. е. в течение сравнительно большого промежутка времени не происходит уменьшения функции цели.

В предлагаемом алгоритме моделирования стохастической программы на разных этапах используются разные модификации Θ_1 , в основном совпадающие с алгоритмом, описанным в [2]. Отличие заключается в том, что вдали от границы нет необходимости проверять точку $\vec{x}^k$ на стохастическую допустимость: с большой вероятностью она стохастически допустима, если $\vec{x}^k \in Y_d^*$. Поэтому вдали от границ области Y_d стохастически подходящее направление выбирается по формулам (2, 3) из [2] на базе равномерно распределенных точек в гиперкубе с центром в $\vec{x}^k$ и ребром r (правило Θ_1'). Вблизи от границ, там, где вероятность очередной точки $\vec{x}^{k+1}$ стать стохастически недопустимой увеличивается, рассеиваемые около $\vec{x}^k$ точки моделируются в соответствии с законом распределения их координат x_i и адекватно постановке (2) проверяется стохастическая допустимость точки $\vec{x}^k$. При этом прежде чем вычислить направление по (2, 3), происходит нормирование F_j

относительно вероятности P_j в соответствии с формулой п. 4 из [2] (правило Θ_1'').

В том случае, если оказалось $\vec{x}^k \notin Y_{st}$, на отрезке $\vec{x}^{k-1}\vec{x}^k$ отыскивается ближайшая к $\vec{x}^k$ точка, стохастически допустимая. Это действие осуществляет правило Θ_2' — «малый» рикошет. Найденная точка обозначается $\vec{x}^{opt,l}$ и запоминается. После этого работает правило Θ_2'' — «большой» рикошет, которое выдает в качестве начальной точки для следующего этапа поиска центр тяжести всех точек, генерированных на предыдущем этапе от $\vec{x}^0$ до $\vec{x}^{opt,l}$ (эта точка образуется постепенно, по мере генерирования поисковых точек).

Введем множество J_k , состоящее из номеров нарушенных (в стохастическом смысле) ограничений $f_j(\vec{x})$. Можно предположить, что неоднократное (L -кратное) отождествление множества J_k с одним и тем же множеством J_* означает, что искомая оптимальная точка стохастической программы находится вблизи границ, номера которых составляют текущее множество J_k . Именно в этом случае работает правило Θ_3 , по которому точка $\vec{x}^{opt,L}$ считается решением стохастической программы, если выполняется кроме того неравенство

$$|F(\vec{x}^{opt,L}) - F(\vec{x}^{opt,L-1})| < \varepsilon,$$

где ε — малая величина, задается априорно.

3. Алгоритм моделирования

На основании сказанного выше можно следующим образом описать алгоритм моделирования стохастической программы (2) (параметры $\delta, r, \varepsilon, q_1, q_2$ задаются априорно):

- п. 1. Имеем $\vec{x}^0 \in Y_d^*$, $J_* := 0$, $l := 0$.
- п. 2. Применяем правило Θ_1' к точке $\vec{x}^0$, получаем точку $\vec{x}^1$ (символически $\Theta(\vec{x}^0) = \vec{x}^1$).
Вообще

$$\Xi(\vec{x}^{k-1}) = \vec{x}^k.$$

- п. 3. Если $\vec{x} \in Y_d^*$, то $r q_1 := r$ и $\rightarrow$ п. 2, иначе $\rightarrow$ п. 4.
- п. 4. $\delta/q_2 := \delta$, $r/q_1 := r$.
- п. 5. $\Theta''(\vec{x}^k) = \vec{x}^{k+1}$. Если $\vec{x}^{k+1} \in Y_{st}$, то $\rightarrow$ п. 2, иначе $\rightarrow$ п. 6.
- п. 6. $J_* := J_k \cup J_*$, $\Xi_2'(\vec{x}^{k+1}) = \vec{x}^{opt,l}$ (малый рикошет).
- п. 7. Если $J_* = J_k$, то $l := l + 1$ и $\rightarrow$ п. 8, иначе $\rightarrow$ п. 9.
- п. 8. Если $l = L$, то $\rightarrow$ п. 10, иначе $\rightarrow$ п. 9.
- п. 9. $\Theta_2''(\vec{x}^0, \vec{x}^1, \dots, \vec{x}^k, \vec{x}^{opt,l}) = \vec{x}^0$ (большой рикошет), $\rightarrow$ п. 2.
- п. 10. Если выполняется правило Θ_3 , то $\rightarrow$ п. 11, иначе $\rightarrow$ п. 9.
- п. 11. Конец.

Здесь в цикле по l происходит в сущности решение L задач под знаком Ξ в (2). Из полученных решений выбирается наилучшее и та-

ким образом получается приближенное решение задачи (2). Эта схема моделирования должна быть особенно экономичной, если $F(\vec{x})$ нелинейна.

4. Вычислительный эксперимент

Для проверки работоспособности приведенной схемы было проведено решение задачи [1]. Следующая таблица дает представление об эффективности алгоритма. В первом столбце приведены результаты стохастического случая из [1] (точнее, решение с помощью симплекс-метода). В последующих — оптимальное значение F^* и вероятности выполнения ограничений на f_j , полученные в результате моделирования после пяти рикошетов от границы Y_{st} . Здесь обозначено

$$\begin{aligned} P[1129,26 \leq f_1] &= P_{11}, \quad P[f_1 \leq 1256,26] = P_{12} \\ P[501,15 \leq f_2] &= P_{21}, \quad P[f_2 \leq 623,15] = P_{22} \\ P[245,51 \leq f_3] &= P_{31}, \quad P[f_3 \leq 298,58] = P_{32} \end{aligned}$$

Решение было получено при $\epsilon = 0,01$; $q_1 = q_2 = 2$, $\delta = 15$.

Таблица 1

	Точное	$l=1$	$l=2$	$l=3$	$l=4$	$l=5$
F^*	4,86	6,18	5,27	5,65	5,31	5,10
P_{11}	0,90	0,98	0,95	0,90	0,93	0,91
P_{12}	0,90	0,94	0,92	0,97	0,94	0,95
P_{21}	0,80	0,90	0,86	0,92	0,81	0,84
P_{22}	0,80	0,83	0,85	0,83	0,87	0,83
P_{31}	0,97	1,00	1,00	0,98	0,97	0,99
P_{32}	0,97	0,99	1,00	1,00	1,00	1,00

Из таблицы видно, что предлагаемый метод моделирования вполне работоспособен. Вместе с тем правило Θ_2 , по которому совершается рикошет от границы области Y_{st} , нельзя считать вполне удачным. Об этом свидетельствует разброс P_{ij} в таблице.

Следует специально отметить, что эксперимент проводился на линейной функции цели, для которой справедливо равенство $E[\sum a_i x_i] = \sum a_i \bar{x}_i$. Поэтому преимущества за счет решения задачи (1) в более общей, нежели (3), постановке (2) не выявилось. В случае нелинейного вида функции цели $F(\vec{x})$ эти преимущества могут оказаться значительными.

5. Об области приложения метода

Прежде всего заметим, что по изложенной методике фактически без изменения составленной программы можно решать задачи стохастического линейного программирования со стохастической матрицей коэффициентов $\|a_{ij}\|$ системы линейных ограничений. Должна быть только составлена программа, моделирующая каждый из коэффициентов с соответствующим законом распределения.

Возможно, однако, более общее направление применения метода, связанное с поэтапной реализацией постановки (2) и поэтапным моделированием решения в этой постановке. Важно подчеркнуть, что в этом случае принципиально допустима оптимизация $F(\vec{x})$ нелинейного стохастического вида. Это тем более важно, что методов решения задач нелинейного стохастического программирования не существует [3], и моделирование остается единственным способом получения практических результатов.

Перечислим возможные приложения метода моделирования для отыскания стохастически возможного направления, изложенного в настоящей работе.

А) В задачах, где модель объекта задается путем статистического моделирования, оптимизация necessarily происходит в условиях помех вследствие ограниченности количества статистических испытаний [5], [6].

Примером такого рода задачи является задача о размещении счетчиков заряженных частиц, оптимальном в смысле максимизации количества частиц, уверенно отличных от фонового излучения (физическая постановка задачи дана в [7]).

Б) Задача оптимального управления, рассмотренная в [8], в общем виде ставится как задача нелинейного математического программирования. В этой задаче, кроме требования максимизации интенсивности излучения, добавляются ограничения на энергию частиц и время их сброса. Учитывая нестабильность положения экстремума вблизи границы ненулевой области излучения и присутствие помех, будем иметь, очевидно, задачу стохастического программирования.

В) Имеется обширный круг задач, в которых аналитический вид оптимизируемой функции задан столь сложного вида оператором (интегро-дифференциальным, многомерным интегралом, оператором минимакса), что вычисление одного значения функции с высокой точностью занимает чрезмерно много машинного времени. С целью удешевления вычисления функций столь сложного вида приходится уменьшать точность их вычисления, что приводит очевидным образом к повышению уровня помех в процессе поиска экстремума. Такого рода операторы поставляют в большом числе задачи оптимизации строительных конструкций [9].

Во всех этих случаях применение развитого в настоящей работе подхода, совмещающего моделирование задачи в начальной постановке с поэтапным интегральным сглаживанием в процессе поиска позволяет надеяться на получение практически применимого решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Захаров, В. П. Тарасенко. Оптимальное управление объектом в статическом режиме как задача стохастического программирования. Тр. 1 Всесоюзного симпозиума по статическим проблемам в технической кибернетике. (Нелинейные и оптимальные системы). М., «Наука», 1971.
2. В. В. Захаров. Идентификация статического объекта с помощью интегральных проекций. Известия ТПИ. Настоящий сборник.
3. Дж. Хедли. Нелинейное и динамическое программирование. М., «Мир», 1967.
4. Г. Зойтендейк. Методы возможных направлений. М., ИЛ., 1963.
5. Н. П. Бусленко. Математическое моделирование производственных процессов. М., «Наука», 1964.

6. Г. И. Марчук, С. М. Ермаков. Метод Монте-Карло и методы вычислительной математики. М., Атомиздат, 1967.

7. В. В. Кузнецов и др. Измерение асимметрии фоторождения π^+ -мезонов на водороде линейно поляризованными γ -квантами. «Ядерная физика», 1971, № 13.

8. В. В. Захаров и др. Алгоритмы управления синхротроном в режиме «ЦВМ — советчик». Известия ТПИ. Настоящий сборник.

9. А. С. Вольмер. Гибкие пластинки и оболочки. М., Техтеориздат, 1956.