

ИДЕНТИФИКАЦИЯ СТАТИЧЕСКОГО ОБЪЕКТА С ПОМОЩЬЮ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРОЕКЦИЙ

В. В. ЗАХАРОВ

(Представлена научным семинаром лаборатории вычислительной техники
и автоматизации НИИ ЯФ)

Для построения математических моделей (идентификации) статических объектов в настоящее время широко применяется метод регрессионного анализа [1] и различные модификации метода оптимального планирования эксперимента [2]. В [3] с помощью методики, названной по координатным интегральным проецированием, был частично идентифицирован нелинейный объект (получены коэффициенты при вторых степенях переменных). Этот же метод дает весьма простой алгоритм построения линейной модели и легко обобщается на случай нелинейной зависимости переменных.

1. Основная идея метода. Пусть требуется найти коэффициенты линейной формы

$$F(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n b_i x_i. \quad (1,1)$$

по результатам наблюдений $F_j = F(\vec{x}^j)$, где $\vec{x}^j = (x_1^j, \dots, x_n^j)$,

$$\vec{x}^j \in [\alpha, \beta], \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \beta = (\beta_1, \dots, \beta_n), j \in J, J = \{1, 2, \dots, N\}.$$

Обозначим

$$I(\alpha, \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} F(\vec{x}) d\vec{x}.$$

Очевидно,

$$I(\alpha, \beta) = \prod_{i=1}^n (\beta_i - \alpha_i) \sum_{i=1}^n b_i \frac{\alpha_i + \beta_i}{2}. \quad (1,2)$$

Перепишем (1,2) в иной форме и назовем эту форму интегральной проекцией на k -ю координатную ось:

$$I(\alpha_k, \beta_k) = \prod_{i \neq k} (\beta_i - \alpha_i) (\beta_k - \alpha_k) \left(\sum_{i \neq k} b_i \frac{\alpha_i + \beta_i}{2} + \frac{\alpha_k + \beta_k}{2} \right).$$

Вычислим $I(\alpha_k, \alpha_k + \delta_k)$, $I(\beta_k - \delta_k, \beta_k)$, где $\delta_k = (\beta_k - \alpha_k)/(t+1)$, $t \geq 1$.

Разность этих величин дает

$$I(\beta_k - \delta_k, \beta_k) - I(\alpha_k, \alpha_k + \delta_k) = \delta_k^2 t b_k \prod_{i \neq k} (\beta_i - \alpha_i),$$

откуда

$$b_k = \frac{I(\beta_k - \delta_k, \beta_k) - I(\alpha_k, \alpha_k + \delta_k)}{\delta_k^2 t \prod_{i \neq k} (\beta_i - \alpha_i)} \quad k=1, 2, \dots, n. \quad (1,3)$$

Таким образом, для вычисления коэффициентов b_k необходимо найти эффективный метод вычисления интегралов в (1,3). Очень удобным в этом смысле является метод Монте-Карло [4].

Пусть $I(\alpha, \beta)$ есть статистическая оценка $J(\alpha, \beta)$. Тогда имеем

$$I(\alpha, \beta) = \prod_{i=1}^n (\beta_i - \alpha_i) \frac{1}{N} \sum_{j=1}^n F_j, \quad (1,4)$$

причем

$$|I(\alpha, \beta) - J(\alpha, \beta)| \leq c_1 \sqrt{\frac{\sigma_F^2}{N}}, \quad (1,5)$$

где σ_F^2 — дисперсия $F(\vec{x})$, функции равномерно распределенных случайных величин x_k ($k=1, \dots, n$), а величина C_1 определяется желательной вероятностью выполнения неравенства (1,5).

Подставляя (1,4) в (1,3) и обозначая $t\delta_k$ через τ_k , получим для b_k

$$b_k \approx b_k^0 = \frac{1}{\tau_k} \left(\frac{1}{N_{2k}} \sum_{s \in J_{2k}} F_s - \frac{1}{N_{1k}} \sum_{r \in J_{1k}} F_r \right). \quad (1,6)$$

Здесь $r \in J_{1k}$, если $x_k^r \in (\alpha_k, \alpha_k + \delta_k)$; $s \in J_{2k}$, если $x_k^s \in (\beta_k - \delta_k, \beta_k)$. Ясно, что множество J_{1k} содержит N_{1k} элементов, а множество J_{2k} — N_{2k} элементов, причем $J_{1k} \cup J_{2k} = J$ и $N_{1k} + N_{2k} = N$.

Особого внимания заслуживает тот факт, что для вычисления всех коэффициентов линейной формы (1,1) по формуле (1,6) используются одни и те же N наблюдений F_j , только спроецированные на разные координатные оси.

2. Уточнение коэффициентов. Дисперсия σ_F^2 , а следовательно, и погрешность формулы (1,6) в отдельных случаях может быть довольно большой. Возникает задача уменьшения величины σ_F^2 и тем самым погрешности вычисления b_k без увеличения количества наблюдений. Такую возможность дает способ выделения главной части интегрируемой по Монте-Карло функции, описанный в [4].

В качестве главной части $F(x)$ рассмотрим функцию

$$Y^0(\vec{x}) = \sum_i b_i^0 x_i. \quad (2,1)$$

Выражение

$$I^0(\alpha, \delta) = \prod_i (\beta_i - \alpha_i) \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N [F_j - Y^0(\vec{x}^j)] + \int_{\alpha}^{\beta} Y^0(\vec{x}) d\vec{x}. \quad (2,2)$$

даст более точное значение $I(\alpha, \beta)$, нежели (1,4). Подставляя это приближенное значение в (1,3) вместо соответствующего точного значения, получим простую итерационную формулу для вычисления коэффициентов b_k :

$$b_k \approx b_k^m = b_k^0 + b_k^{m-1} - \frac{1}{\tau_k} \left(\frac{1}{N_{2k}} \sum_s Y_s^{m-1} - \frac{1}{N_{1k}} \sum_r Y_r^{m-1} \right), m=1,2,\dots \quad (2,3)$$

3. Влияние помех. Оценка дисперсии коэффициентов. Можно показать, что если наблюдаемые значения F_j искажены наложением аддитивной помехи с дисперсией σ^2 , то коэффициенты b_k будут вычислены с дисперсиями

$$\sigma^2(b_k) \leq c_2 \frac{4}{\tau^2} \frac{\sigma^2}{N}, \quad (3,1)$$

где c_2 — константа, характеризующая вероятность выполнения неравенства (3,1).

Эти дисперсии имеют тот же порядок, что и в линейном ортогональном планировании [2]. Вследствие этого перспективно применение формулы (2,3) для вычисления вектора градиента произвольной функции $F(x)$ в обстановке помех.

4. Обобщение вида аппроксимирующего полинома. Заметим, что δ

$$\int_{-\delta}^{\delta} \prod_{i \neq k} x_i^{m_i} \cdot x_k^r d\vec{x} = 0, \quad (4,1)$$

где m_i — действительная величина, r — нечетное. (В (4,1) интегрирование многомерное).

Положим, что выдвинута гипотеза $F(\vec{x}) \approx Q(\vec{x})$, где

$$Q(\vec{x}) = \sum_i a_{ii} x_i^2 + \sum_{i \neq k} a_{ik} x_{ik} + \sum_i a_{i0} + a_{00}$$

и требуется установить вид $Q(\vec{x})$ (т.е. найти $\{a_{ik}\}, i, k = \overline{0, n}$) по результатам наблюдений $\{x^j, F_j\}, j \in I$.

Учитывая (4,1), получим

$$\int_{-\delta}^{\delta} Q(\vec{x}) d\vec{x} = (2\delta)^n \left(\frac{\delta^2}{3} \sum_{i=1}^n a_{ii} + a_{00} \right), \quad (4,2)$$

откуда найдем a_{00} при условии, что a_{ii} ($i = \overline{1, n}$) найдены по методу проецирования, приведенному в [3].

Далее

$$\int_{-\delta}^{\delta} Q(\vec{x}) x_i d\vec{x} = (2\delta)^n a_{i0} \cdot \frac{1}{3} \delta^2. \quad (4,3)$$

$$\int_{-\delta}^{\delta} Q(x) x_i x_k d\vec{x} = (2\delta)^n a_{ik} \frac{2\delta^4}{9}; \quad i, k = \overline{1, n}.$$

Заменяя формулы (4,2), (4,3) их дискретным аналогом по (1,4), получим оценки a_{ik} на основе равномерно рассеянных наблюдений F_j :

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N F_j \approx \frac{\delta^2}{3} \sum_{i=0}^n a_{ii} + a_{00}; \quad \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_i^j F_j \approx a_{i0} \cdot \frac{\delta^2}{3},$$

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_i^j x_k^j F_j \approx a_{ik} \frac{2 \delta^4}{9}; \quad i, k = \overline{1, n}. \quad (4,4)$$

Замечание 1. Нетрудно видеть, что, подбирая соответствующим образом состав множителей под интегралом и их степени, можно идентифицировать полиномы произвольной степени.

Замечание 2. Организация итерационного уточнения коэффициентов a_{ik} ($i, k = \overline{0, n}$) с использованием методики выделения главной части по формулам (2,2) не представляет труда.

5. Более общий вид распределения переменных. Пусть управляемые переменные x_k имеют произвольную (а не обязательно равномерную) плотность совместного распределения $p(\vec{x})$, усеченную гиперинтервалом $[\alpha, \beta]$.

Очевидно,

$$I(\alpha, \beta) = M \left[\frac{F(\vec{x})}{p(\vec{x})} \right] = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{F(\vec{x})}{p(\vec{x})} p(\vec{x}) d\vec{x}.$$

Поэтому всюду в соотношениях (1,6), (4,4) заменяя значения функции F_j отношением $F_j/p(x^j)$ получим возможность пользоваться для отыскания коэффициентов a_{ik} итерациями типа (2,3), не изменяя формул.

6. Область применения метода. а) В задачах активного эксперимента предлагаемый метод дает возможность на основе одних и тех же наблюдений проверить последовательно линейную, квадратичную, кубическую и т. д. гипотезы относительно математического описания объекта. Таким образом, оказывается, что равномерное рассеяние испытаний является универсальным и последовательно композиционным планом эксперимента.

б) Обобщение п. 5 дает возможность применять предлагаемый метод интегральной идентификации для отыскания режимов объектов по результатам пассивного эксперимента. При этом знание распределений компонент вектора \mathbf{x} позволяет уменьшить дисперсию искоемых коэффициентов.

в) В некоторых задачах существенное значение имеет уточнение коэффициентов модели по вновь полученным наблюдениям процесса (коррекция модели). Таковы задачи управления объектом или задачи классификации и распознавания образов (например, в [5]). Из формулы (2,3) видно, что включение новых наблюдений в процессе итераций возможно в любой момент и не вызывает никакого усложнения алгоритма.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. В. Линник. Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений. М., Физматгиз, 1962.
2. В. В. Налимов, Н. А. Чернова. Статистические методы планирования экстремальных экспериментов. М., «Наука», 1965.
3. В. В. Захаров. Метод интегрального сглаживания в многоэкстремальных и стохастических задачах. Изв. АН СССР. «Техническая кибернетика», № 4, 1970.
4. Н. П. Бусленко и др. Метод статистических испытаний. М., Физматгиз, 1962.
5. Э. С. Божанов, Г. К. Круг. Классификация многофакторных объектов по экспериментальным данным. В сб.: «Планирование эксперимента», М., «Наука», 1966.