ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ
И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ. С. М. КИРОВА

Том 277 1977

РЕШЕНИЕ ПО СПОСОБУ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДВУМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА. РАСПРОСТРАНЕНИЕ СПОСОБА НА УРАВНЕНИЯ, НЕ ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ВРЕМЕНИ

Б. Ф. КРУТОЙ

(Представлена научным семинаром кафедры инженерной и вычислительной математики)

Дано уравнение Пуассона для плоской замкнутой, многосвязной вообще области $\overline{D}^{(2)}=D^{(2)}+r$:

$$\Delta u(x, y)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f(x, y), \tag{1}$$

с краевым условием

$$\overline{u}=u(x, y)=h(x, y) \tag{2}$$

на границе R области $\overline{D}^{(2)}$ (рис. 1).

Заменим искомую функцию $u(x, y)$ ее приближенным представлением $\varphi(x, y)$ в виде разложения

$$u(x, y)\approx\varphi(x, y)=\sum_{\varkappa=0}^{m} c_\varkappa\varphi_\varkappa(x, y) \tag{3}$$

по некоторым выбранным нами опорным взаимонезависимым функциям $\varphi_\varkappa(x, y)$, где $c_\varkappa$ — неизвестные коэффициенты.

Для определения коэффициентов $c_\varkappa$ зададим μ каких-нибудь точек $\overline{M}_s$ на границе R и ν каких-нибудь точек M_t внутри области $\overline{D}^2$ (рис. 1), причем потребуем, чтобы

$$\mu+\nu=n>m+1=\overline{m}, \tag{4}$$

Тогда для границы r мы можем написать μ уравнений ошибок вида, вытекающего из (2), (3):

$$\sum_{\varkappa=0}^{m} c_\varkappa\varphi_\varkappa(x_s,y_s)-h(x_s,y_s)=\varepsilon_s, \tag{5}$$

$$s=1, 2, \ldots, \mu,$$

где ε_s — соответствующие ошибки этих уравнений. Для внутренней же области $D^{(2)}$ можем написать ν уравнений ошибок вида, вытекающего из (1), (3):

$$\sum_{\varkappa=0}^{m}\left(\frac{\partial^2\varphi_\varkappa(x_t, y_t)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi_\varkappa(x_t, y_t)}{\partial y^2}\right)-f(x_t, y_t)=\varepsilon_t, \qquad (6)$$
$$(t=1,2,\ldots,\nu)$$

где ε_t — ошибки уравнений (6).

Введем обозначения

$$1)\ \varphi_\varkappa(x_s, y_s)=a_{s\varkappa}, \qquad 2)\ h(x_s, y_s)=h_s,$$
$$3)\ \frac{\partial^2\varphi_\varkappa(x_t, y_t)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi_\varkappa(x_t, y_t)}{\partial y^2}=b_{t\varkappa}, \quad 4)\ f(x_t, y_t)=f_t. \qquad (7)$$

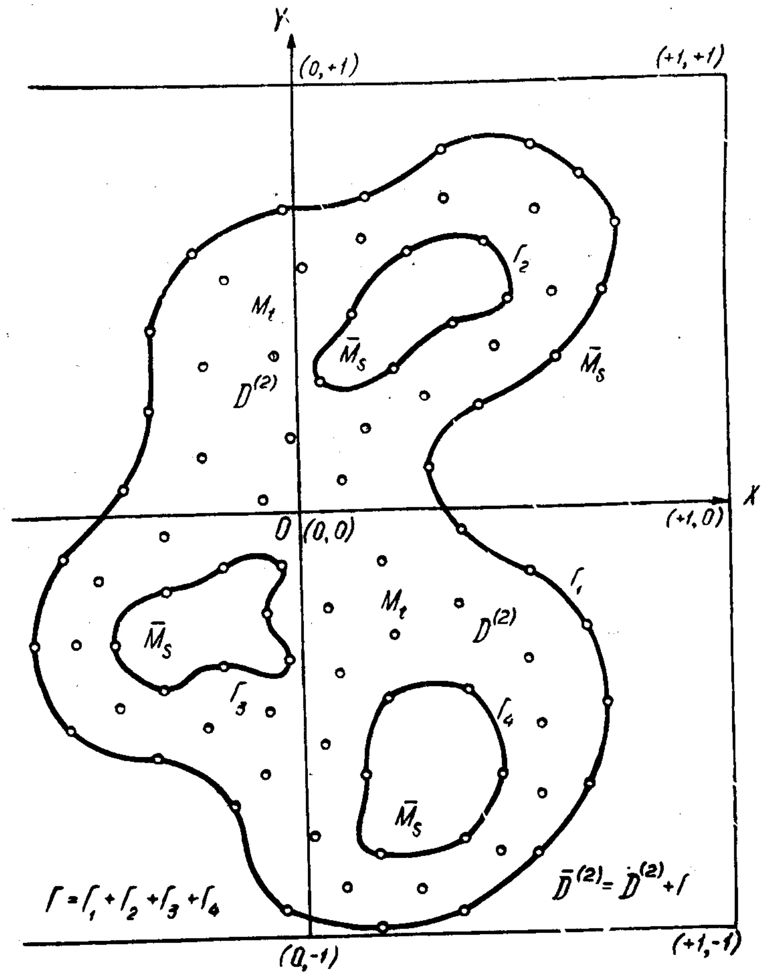

Рис. 1. Область $\bar{D}^{(2)}=D^{(2)}+\Gamma$, внутренние M^t и граничные M_s опорные точки для функции $u(x, y)=u(M)$.

В обозначениях (7) объединенный свод из $\mu+\nu=n$ уравнений ошибок (5), (6) запишется так

$$\begin{cases}\sum\limits_{\varkappa=0}^{m} a_{s\varkappa}c_\varkappa-h_s=\varepsilon_s,\ (s=1,2,\ldots\mu),(\mu+\nu=n<m+1=\bar{m}\ . \\ \sum\limits_{\varkappa=0}^{m} b_{t\varkappa}c_\varkappa-f_t=\varepsilon_t,(t=1,2,\ldots\nu)\end{cases} \qquad (8)$$

или в матричном виде

$$\begin{cases} a_{(\mu\overline{m})}\, c_{(\overline{m}1)} - h_{(\mu 1)} = \varepsilon_{(\mu 1)} \\ b_{(\nu\overline{m})}\, c_{(\overline{m}1)} - f_{(\nu 1)} = \varepsilon_{(\nu 1)} \end{cases} (\mu+\nu=n>m+1=\overline{m}) \tag{8*}$$

В целях дальнейшего упрощения записи свода (8), (8*) введем в (8*) следующие дополнительные обозначения:

$$1)\ \begin{pmatrix} a_{\mu\overline{m}} \\ b_{(\nu\overline{m})} \end{pmatrix} = A_{(\mu+\nu,\overline{m})} = A_{(n\overline{m})}, \qquad 2)\ \begin{pmatrix} h_{(\mu 1)} \\ f_{(\nu 1)} \end{pmatrix} = F_{(\mu+\nu.1)} = F_{(n1)} \tag{9}$$

$$3)\ \begin{pmatrix} \varepsilon_{(\mu 1)} \\ \varepsilon_{(\nu 1)} \end{pmatrix} = \mathrm{E}_{(\mu+\nu.1)} = \mathrm{E}_{(n1)}, \qquad 4)\ c_{(\overline{m}1)} = C_{(\overline{m}1)}.$$

Тогда объединенный свод (8), (8*) из n уравнений ошибок может быть записан в одном из следующих двух видов:

$$\sum_{\varkappa=0}^{m} A_{s\varkappa} C_{\varkappa} - F_s = \mathrm{E}_s,\ (s=1,2,\dots,n>m+1=\overline{m}). \tag{10}$$

$$A_{(n\overline{m})}\, C_{(\overline{m}1)} - F_{(n1)} = \mathrm{E}_{(n1)},\ (n>m+1=\overline{m}). \tag{10*}$$

Так как представление (3) для искомой функции $u(x, y)$ является приближенным, $\overline{m}$ опорных функций $\varphi_{\varkappa}(x, y)$ взаимонезависимы и $n>\overline{m}$, то существует бесконечное множество совокупностей $c_1^{(\nu)}$, $c_2^{(\nu)}, \dots, c_m^{(\nu)}$ из $\overline{m}$ коэффициентов $c_{\varkappa} = C_{\varkappa}$, удовлетворяющих своду уравнений (10) с той или иной степенью точности. Следуя Гауссу, будем считать наиболее надежной такую совокупность $\overline{c}_0$, $\overline{c}_1$, ..., $\overline{c}_m$ коэффициентов $c_{\varkappa} = C_{\varkappa}$, которая удовлетворяет условию способа наименьших квадратов

$$\sum_{s=1}^{n} \mathrm{E}_s^2 = \sum_{s=1}^{n} \mathrm{E}_{s1}^2 = \sum_{s=1}^{n} \mathrm{E}_{1s}^* \mathrm{E}_{s1} = \mathrm{E}_{(1n)}^* \mathrm{E}_{(n1)} = Q^2 = \text{наим}. \tag{11}$$

Но согласно (10)

$$Q^2 = \sum_{s=1}^{n} \mathrm{E}_{1s}^* \mathrm{E}_{s1} = Q^2(C_0, C_1, \dots, C_m).$$

Поэтому условие (11) равносильно $\overline{m}$ условиям

$$\frac{\partial}{\partial C_\lambda} \sum_{s=1}^{n} \mathrm{E}_s^2 = \frac{\partial}{\partial C_\lambda} Q^2(C_0, C_1, \dots, C_{\varkappa}, \dots, C_m) = 0. \tag{12}$$

$$(\lambda = 0, 1, \dots, m)$$

Выполняя расчет условий (12), найдем последовательно

$$\frac{\partial}{\partial C_\lambda} \sum_{s=1}^{n} \mathrm{E}_s^2 = 2\sum_{s=1}^{n} \mathrm{E}_s \frac{\partial \mathrm{E}_s}{\partial C_\lambda} = 2\sum_{s=1}^{n} \mathrm{E}_s \frac{\partial}{\partial C_\lambda}\left(\sum_{\varkappa=0}^{m} A_{s\varkappa} C_{\varkappa} - F_s\right) =$$

$$= 2\sum_{s=1}^{n} \mathrm{E}_s \sum_{\varkappa=0}^{m} A_{s\varkappa} \frac{\partial C_{\varkappa}}{\partial C_\lambda} = 2\sum_{s=1}^{n} \mathrm{E}_s \sum_{\varkappa=0}^{m} A_{s\varkappa} \delta_{\varkappa}^{\lambda} = 0,$$

где

$$\delta_{\varkappa}^{\lambda}=\begin{cases} +1, & \varkappa=\lambda \\ 0, & \varkappa\neq\lambda. \end{cases}$$

Отсюда видно, что

$$\sum_{\varkappa=0}^{m} A_{s\varkappa}\delta_{\varkappa}^{\lambda}=A_{s\lambda}=A_{\lambda s}^{*}.$$

Поэтому

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial C_{\lambda}}\sum_{s=1}^{n}\mathrm{E}_{s}^{2}=\sum_{s=1}^{n}\left(\sum_{\varkappa=0}^{m}A_{s\varkappa}C_{\varkappa}-F_{s}\right)A_{\lambda s}^{*}= \qquad (\lambda=0,1\ldots,m) \qquad (*)$$

$$=\sum_{\varkappa=0}^{m}\left(\sum_{s=1}^{n}A_{\lambda s}^{*}A_{s\varkappa}\right)C_{\varkappa}-\sum_{s=1}^{n}A_{\lambda s}^{*}F_{s}=0.$$

Введем обозначения

$$1)\ \sum_{s=1}^{n}A_{\lambda s}^{*}A_{s\varkappa}=B_{\lambda\varkappa}, \qquad 2)\ \sum_{s=1}^{n}A_{\lambda s}^{*}F_{s}=K_{\lambda}. \qquad (13)$$

или в матричном виде

$$1)\ A_{(\overline{m}n)}^{*}A_{(n\overline{m})}=B_{(\overline{m}\overline{m})}, \qquad 2)\ A_{(\overline{m}n)}^{*}F_{(n1)}=K_{(\overline{m}1)}. \qquad (13^{*})$$

Тогда $\overline{m}+1=m$ условий (12) примут следующий окончательный вид:

$$\sum_{\varkappa=0}^{m}B_{\lambda\varkappa}C_{\varkappa}-K_{\lambda}=0, \quad (\lambda=0,1,\ldots,m). \qquad (14)$$

или в матричном виде

$$B_{(\overline{m}\overline{m})}C_{(\overline{m}1)}-K_{(\overline{m}1)}=0_{(\overline{m}1)}. \qquad (14^{*})$$

Решая свод $\overline{m}$ уравнений (14), определим наивыгоднейшие значения $\overline{C}_{\varkappa}=\overline{c}_{\varkappa}$ для m коэффициентов $\overline{c}_{\varkappa}$, входящих в представление (3) для искомой функции $u(x, y)$. Подстановка же найденных значений этих коэффициентов в уравнения (10) или — что то же — в уравнения (8) даст соответствующие ошибки $\varepsilon_s=\varepsilon_s$, ε_t указанных уравнений.

Правильность расчета коэффициентов $C_{\varkappa}=c_{\varkappa}$, ошибок $\varepsilon_s=\varepsilon_s$, ε и величины $Q^2=\sum_{s=1}^{n}\varepsilon_s^2$ проверим, умножив уравнение (10*) слева на $A_{(\overline{m}n)}^{*}$, $\varepsilon_{(1n)}^{*}$ и $F_{(1n)}^{*}$. Тогда мы получим следующие поверочные равенства, учитывая (13*) и (14*):

$$1)\ A_{(\overline{m}n)}^{*}\mathrm{E}_{(n1)}=0_{(\overline{m}1)}, \quad 2)\ Q^2=\mathrm{E}_{(1n)}^{*}\mathrm{E}_{(n1)}=-\mathrm{E}_{(1n)}^{*}F_{(n1)}, \qquad (15^{*})$$

$$3)\ F_{(1n)}^{*}F_{(n1)}C_{(1\overline{m})}^{*}B_{(\overline{m}\overline{m})}C_{(\overline{m}1)}=\mathrm{E}_{(1n)}^{*}\mathrm{E}_{(n1)}=Q^2.$$

Расчет приближения $\varphi(x, y)$ для искомой функции $u(x, y)$ по описанному выше способу наименьших квадратов позволяет подсчитать также точность этого приближения, задаваемую в виде среднеквадратической ошибки $\pm m_{\varphi}$ или ее квадрата m_{φ}^2. Расчет m_{φ}^2 производится так [1]:

$$1)\ \mu^2=\frac{Q^2}{n-m};\qquad 2)\ m^2_{c_\varkappa}=\mu^2\beta_{\varkappa\varkappa},\ (\beta_{(\overline{m}\,\overline{m})}=B^{-1}_{(\overline{m}\,\overline{m})}); \tag{16}$$

$$3)\ m^2_\varphi=m^2[\varphi(x,y)]=\mu^2\sum_{\varkappa,\lambda=1}^{m}\beta_{\varkappa\lambda}\varphi_\varkappa(x,y)\varphi_\lambda(x,y)=$$

$$=\mu^2\overset{*}{\varphi}_{(1\overline{m})}(x,y)\beta_{(\overline{m}\,\overline{m})}\varphi_{(\overline{m}1)}(x,y).$$

В заключение отметим, что для построения набора опорных взаимонезависимых функций $\varphi^\varkappa(x,\ y)$ можно взять два ряда

$$x^0=1,\ x^1,x^2,\dots,x^\mu,\dots,x^r.$$

$$y^0=1,\ y^1,y^1,\dots,\ y^\nu,\dots y^r.$$

и затем образовать матрицу произведения этих видов

$$\begin{array}{l} x^0y^0\ \ x^1y^0\dots x^\mu y^0\dots x^ry^0.\\ x^0y^1\ \ x^1y^1\dots x^\mu y^1\dots x^ry^1.\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ x^0y^\nu\ \ x^1y^\nu\dots x^\mu y^\nu\dots x^ry^\nu.\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ x^0y^rx^1y^r\dots x^\mu y^r\dots x^ry^r.\end{array}$$

Тогда

$$\varphi_{\mu\nu}(x,y)=x^\mu y^\nu=\varphi_\varkappa(x,y).$$

Следовательно, в данном случае $m=r^2$.

Для построения набора опорных функций $\varphi_\varkappa$ $(x,\ y)$ можно использовать также ряды

$$T^*_0(x),\ T^*_1(x),\dots,\ T^*_\mu(x),\dots,T^*_r(x).$$

$$T^*_0(y),\ T^*_1(y),\dots,\ T^*_\nu(y),\dots,\ T^*_r(y),$$

где T^*_μ (x), T^*_ν (y) — приведенные многочлены Чебышева первого рода, определяемые следующим образом [2]:

$$T^*_0(z)=1,\ T^*_1(z)=z,\ T^*_\varkappa(z)=\frac{1}{2^{\varkappa-1}}\cos(\varkappa\arccos z);$$

$$\arccos z=\theta,\ z=\cos\theta,\ T^*_\varkappa(\theta)=\frac{1}{2^{\varkappa-1}}\cos\varkappa\theta; \tag{17}$$

$$T^*_{\varkappa+1}(z)=z\,T^*_\varkappa(z)-\frac{1}{4}T^*_{\varkappa-1}(z).$$

Тогда

$$\varphi_{\mu\nu}(x,y)=T^*_\mu(x)\,T^*_\nu(y)=\varphi_\varkappa(x,y).$$

Чтобы числа $\varphi_{\mu\nu}$ $(x,\ y)$ не принимали больших значений в области $\overline{D}^2$, полезно заключить эту область в квадрат

$$-1\leqslant x\leqslant+1$$

$$-1\leqslant y\leqslant+1,$$

взяв центр квадрата O в середине области $\overline{D}^{(2)}$ (рис 1).

Отметим еще, что если число μ точек M_s границы R больше, чем число $m+1$ коэффициентов $c_\varkappa$ в представлении (3) для $u(x, y)$ через $\varphi(x, y)$

$$\mu > m+1,$$

то для определения коэффициентов $c_\varkappa$ и расчета квадратических разбросов $m^2_{c_\varkappa} m^2_\varphi$ для найденных $c_\varkappa$ и $\varphi(x, y) \approx u(x, y)$ мы могли бы обойтись только точками M_s, взятыми на границе R.

Обобщение. Предлагаемый способ решения краевой задачи для уравнения Пуассона может быть применен так же просто к уравнению Гельмгольца

$$(\Delta + k^2)\ u\ (x,y) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k^2\right) u(x,y) = f(x,y) \tag{17}$$

с граничным условием

$$\left[\alpha(x,y) + \beta(x,y)\frac{\partial}{\partial n}\right] u(x,y)\,|\,_\Gamma = h(x,y). \tag{18}$$

Более того, изложенный здесь способ позволяет решать совершенно просто даже более трудную краевую задачу для линейного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами

$$\left[A^{ij}(x,y)\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial y^j} + B^i(x,y)\frac{\partial}{\partial x^i} + C\right] u(x,y) = f(x,y). \tag{19}$$

и граничным условием вида (18).

Наконец, совершенно ясно, что предложенным способом решается без всяких осложнений плоская краевая задача для линейного дифференциального уравнения n-го порядка в частных производных и с переменными коэффициетами, если искомая функция u не зависит от времени t, то есть $u = u(x, y)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Иордан. Руководство по геодезии. М., 1939.