

**ОБОБЩЕННАЯ СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДВУХ  
ПРОИЗВОЛЬНЫХ МАТРИЦ  $a_{(nn)}$   $\varphi_{(nn)}$  И ЕЕ РЕШЕНИЕ**

Б. Ф. КРУТОЙ

(Представлена научным семинаром кафедры инженерной и вычислительной математики)

1. Предположим, что нам заданы две произвольные матрицы  $a_{(nn)}$   $\varphi_{(nn)}$ , вещественные или комплексные. Тогда может быть поставлена следующая обобщенная спектральная задача:

Определить наборы (спектр) собственных чисел  $\lambda$  и собственных векторов  $g_{(n)} = \bar{g}$  для пары матриц  $a_{(nn)}$  и  $\varphi_{(nn)}$ , удовлетворяющие уравнению

$$a_{(nn)}g_{(n)} = \lambda \varphi_{(nn)}g_{(n)}, \quad (1)$$

или в операторном виде

$$A\bar{g} = \lambda \Phi \bar{g}, \quad (1^*)$$

где  $A$  и  $\Phi$  — линейные операторы, отвечающие матрицам  $a_{(nn)}$  и  $\varphi_{(nn)}$  в некоторой отсчетной опоре, а  $\lambda$  и  $\bar{g}$  — собственные числа и векторы операторной пары  $A$  и  $\Phi$ .

Задачи подобного рода возникают при решении в замкнутой области  $\bar{D}^{(n)} = D^{(n)} + \Gamma$  линейных операторных уравнений

$$L(x)u(x) = f(x), \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (2)$$

с краевым условием

$$L(x)u(x)|_{\Gamma} = h(x) \quad (3)$$

на границе  $\Gamma$  области  $\bar{D}$ , когда требуется найти собственные значения  $\lambda$  и собственные функции  $w(x)$  операторов  $L$  и  $L$ , удовлетворяющие условиям:

$$1) L(x)w(x) = \Theta, \quad 2) L(x)w(x)|_{\Gamma} = h(x), \quad (4)$$

где  $\Theta$  — нулевой оператор. Тогда решение задачи (4) прямым способом, в котором искомая собственная функция  $w(x)$  операторов  $L$ ,  $L$  задается в виде разложения

$$w(x) \approx \varphi(x) = \sum_{v=0}^m c_v \varphi_v(x). \quad (5)$$

по  $m$  опорным взаимонезависимым функциям  $\varphi_\nu(x)$ , приводит к необходимости решить предварительно обобщенную спектральную задачу (1). Такой, например, случай рассмотрен в моей статье [1] при решении задачи (4) по способу наименьших квадратов.

2. Приступим к решению обобщенной спектральной задачи, задаваемой однородным уравнением (1) с неизвестными  $\lambda$  и  $g_{(n)}$ . Записав это однородное уравнение в виде

$$(a_{(nn)} - \lambda \varphi_{(nn)}) g_{(n)} = 0_{(n)}, \quad (1a)$$

мы прежде всего замечаем, что удовлетворим (1a), взяв  $g = 0$ . Если же поставить своей целью определить из (1a) отличные от 0 значения собственного вектора  $g_{(n)}$ , то этого достигнем, приравняв 0 коэффициент  $(a_{(nn)} - \lambda \varphi_{(nn)})$  в уравнении (1a), что равносильно условию

$$|a_{(nn)} - \lambda \varphi_{(nn)}| = 0 \quad (6)$$

для определителя  $|a_{(nn)} - \lambda \varphi_{(nn)}|$  матричного коэффициента  $(a_{(nn)} - \lambda \varphi_{(nn)})$ .

Развертывая определитель (6), получим алгебраическое уравнение  $n$ -й степени с неизвестным  $\lambda$

$$|a_{(nn)} - \lambda \varphi_{(nn)}| = \sum_{x=0}^n b_x \lambda^x = 0. \quad (6^*)$$

Решая это уравнение, получим  $n$  значений  $\lambda_s$  неизвестного  $\lambda$ , среди которых могут встречаться и комплексные пары вида  $\lambda_\nu = \alpha_\nu + i \beta_\nu$ ,  $\lambda_{\nu+1} = \alpha_\nu - i \beta_\nu$ . Возможны также кратные корни  $\lambda_\beta$  среди  $n$  корней  $\lambda_s$  неизвестного  $\lambda$ . Поэтому число  $r$  различных корней  $\lambda_\beta$  может быть и меньше  $r$ , так что  $r \leq n$ .

Вставляя найденные  $r \leq n$  различных корней  $\lambda_\beta$  уравнения (6\*) в свод уравнений (1a), получим связку из  $r$  сводов уравнений с неизвестными векторами  $\bar{g}_\beta = g_{(n)\beta}$ , — собственными векторами операторной пары  $A, \Phi$ :

$$a_{(nn)} g_{(n)\beta} = \varphi_{(nn)} g_{(n)\beta} \lambda_\beta, \quad (\beta = 1, 2, \dots, r) \quad (7)$$

что можно представить также в матричном виде

$$a_{(nn)} g_{(nr)} = \varphi_{(nn)} g_{(nr)} \lambda_{(rr)}, \quad (7a)$$

где  $\lambda_{(nn)}$  — диагональная матрица

$$\lambda_{(rr)} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_{22} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{\beta\beta} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \lambda_{rr} \end{bmatrix}, \quad \lambda_{\beta\beta} = \lambda_\beta. \quad (8)$$

Что касается операторного уравнения (1\*), то теперь оно принимает следующий вид:

$$A \bar{g}_\beta = \lambda_\beta \Phi \bar{g}_\beta, \quad (\beta = 1, 2, \dots, r \leq n). \quad (7^*)$$

Полученное однородное матричное уравнение (7\*), где, кроме заданных  $a_{(nn)}$  и  $\varphi_{(nn)}$ , теперь уже известна и диагональная матрица



$$= [\bar{g}_{\beta 1} \bar{g}_{\beta 2} \cdots \bar{g}_{\beta, \alpha-1} \cdots \bar{g}_{\beta \alpha} \cdots g_{\beta \partial \beta}] \begin{bmatrix} \lambda_{\beta} \Phi & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_{\beta} \Phi & 1 & \cdots & 0 & & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_{\beta} \Phi & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & \lambda_{\beta} \Phi & 1 & & & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \lambda_{\beta} \Phi & & \Phi \end{bmatrix},$$

которому соответствует следующее матрично-векторное соотношение:

$$a_{(nn)} [g_{(n)1}^{\beta} g_{(n)2}^{\beta} \cdots g_{(n), \alpha-1}^{\beta} g_{(n)\alpha}^{\beta} \cdots g_{(n)\partial \beta}^{\beta}] = a_{(nn)} g_{(n\partial \beta)} = \quad (11)$$

$$= g_{(n\partial \beta)} \begin{bmatrix} \lambda_{\beta} \Phi_{(nn)} & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_{\beta} \Phi_{(nn)} & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_{\beta} \Phi_{(nn)} & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \lambda_{\beta} \Phi_{(nn)} \end{bmatrix} = g_{(n\partial \beta)} \omega_{(\partial \beta, \partial \beta)}.$$

Таким образом, каждому кратности  $\partial_{\beta}$  собственному числу  $\lambda_{\beta}$  операторной пары  $A, \Phi$  отвечает матричное равенство

$$a_{(nn)} g_{(n\partial \beta)} + g_{(n\partial \beta)} \omega_{(\partial \beta, \partial \beta)}, \quad (11a)$$

где  $\omega_{(\partial \beta, \partial \beta)}$  — обобщенная матрица

$$\omega_{(\partial \beta, \partial \beta)} = \begin{bmatrix} \lambda_{\beta} \Phi_{(nn)} & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_{\beta} \Phi_{(nn)} & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_{\beta} \Phi_{(nn)} & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \lambda_{\beta} \Phi_{(nn)} \end{bmatrix} \quad (12)$$

Теперь вместо равенства (7a)

$$a_{(nn)} g_{(nr)} = \Phi_{(nn)} g_{(nr)} \lambda_{(rr)}, \quad (7a)$$

где

$$g_{(nr)} = [g_{(n)1} g_{(n)2} \cdots g_{(n)\beta} \cdots g_{(n)r}], \quad (r \leq n) \quad (13)$$

и  $\lambda_{(rr)}$  — чисто диагональная матрица, мы можем составить более общее равенство:

$$a_{(nn)} g_{(nn)} = \Phi_{(nn)} g_{(nn)} \omega_{(nn)}, \quad (14)$$

в котором

$$1) g_{(nn)} = [g_{(n\partial_1)} g_{(n\partial_2)} \cdots g_{(n\partial_3)} \cdots g_{(n\partial_r)}], \quad (15)$$

$$2) g_{(n\partial_3)} = [g_{(n)1}^{\beta} g_{(n)2}^{\beta} \cdots g_{(n)\alpha}^{\beta} \cdots g_{(n)\partial_3}^{\beta}], \quad (16)$$

$$3) \omega_{(nn)} = \begin{bmatrix} \omega_{(\partial_1, \partial_1)} & 0_{(\partial_1, \partial_2)} \cdots 0_{(\partial_1, \partial_3)} & \cdots & 0_{(\partial_1, \partial_r)} \\ 0_{(\partial_2, \partial_1)} \omega_{(\partial_2, \partial_2)} & 0_{(\partial_2, \partial_3)} \cdots 0_{(\partial_2, \partial_r)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0_{(\partial_3, \partial_1)} 0_{(\partial_3, \partial_2)} \cdots \omega_{(\partial_3, \partial_3)} & \cdots & \cdots & 0_{(\partial_3, \partial_r)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0_{(\partial_r, \partial_1)} 0_{(\partial_r, \partial_2)} \cdots 0_{(\partial_r, \partial_3)} & \cdots & \cdots & \omega_{(\partial_r, \partial_r)} \end{bmatrix} \quad (17)$$

Таким образом,  $\omega_{(nn)}$  есть клеточно-диагональная матрица. Из равенства (14) вытекает, что эта матрица  $\omega_{(nn)}$  может быть выражена непосредственно через матрицы  $a_{(nn)}$ ,  $\varphi_{(nn)}$  и  $a_{(nn)}$ .

$$\omega_{(nn)} = g_{(nn)}^{-1} \varphi_{(nn)}^{-1} a_{(nn)} g_{(nn)} = g_{(nn)}^{-1} b_{(nn)} g_{(nn)}, \quad (18)$$

$$b_{(nn)} = \varphi_{(nn)}^{-1} a_{(nn)}. \quad (19)$$

Рассмотрение равенства (18) с обозначением (19) показывает, что хотя согласно (17) и (12) матрица  $\omega_{(nn)}$  представляется в обобщенном клеточно-диагональном виде, но в действительности  $\omega_{(nn)}$  есть обычная клеточно-диагональная матрица. Сказанное вытекает из того, что в определяющее матрицу  $\omega_{(nn)}$  равенство (18) входят обычные  $nn$ -матрицы  $a_{(nn)}$ ,  $g_{(nn)}$ ,  $\varphi_{(nn)}^{-1}$  и  $g_{(nn)}^{-1}$ . Действительный вид входящих в  $\omega_{(nn)}$  клеток  $\omega_{(\alpha_3 \cdot \alpha_3)}$  будет указан позже.

4. Изложенный здесь способ решения обобщенной спектральной задачи (1) для пары матриц  $a_{(nn)}$ ,  $\varphi_{(nn)}$  произвольного вида оказывается затруднительным при большом  $n$ . Именно, очень трудным становится тогда расчет коэффициента  $b_s$  алгебраического уравнения  $n$ -й степени (6\*) путем раскрытия соответствующего определителя  $|a_{(nn)} - \lambda \varphi_{(nn)}|$ . Поэтому целесообразно в таких случаях строить непосредственно искомые матрицы  $g_{(nn)}$  и  $\omega_{(nn)}$ , исходя из уравнения (18) и применяя способ последовательных вращений.

Приведение уравнения (14) к виду (18) равносильно тому, что обобщенную спектральную задачу (1) для матриц  $a_{(nn)}$ ,  $\varphi_{(nn)}$

$$a_{(nn)} g_{(n)} = \lambda \varphi_{(nn)} g_{(n)}. \quad (1)$$

мы заменяем на обычную спектральную задачу для матрицы

$$\begin{aligned} b_{(nn)} &= \varphi_{(nn)}^{-1} a_{(nn)}; \\ b_{(nn)} g_{(n)} &= \lambda g_{(n)}. \end{aligned} \quad (1.0)$$

Поэтому при большом  $n$  обобщенную спектральную задачу (1), представленную в виде (1.0), целесообразно решать предложенным мной смешанным способом Данилевского и последовательных вращений, подробное изложение которого дано в статье [2].

В указанном способе матрица упрощенного строения  $\omega_{(nn)}$ , определяемая точным выражением (18)

$$\omega_{(nn)} = g_{(nn)}^{-1} b_{(nn)} g_{(nn)}, \quad b_{(nn)} = \varphi_{(nn)}^{-1} a_{(nn)}, \quad (18)$$

находится из последовательности расчетных равенств

$$\omega_{(nn)}^{(s+1)} = (g_{(nn)}^{(s)})^{-1} \omega_{(nn)}^{(s)} g_{(nn)}^{(s)} = \varphi_{(nn)}^{(s)} b_{(nn)}^{(s)} g_{(nn)}^{(s)} = b_{(nn)}^{(s+1)}, \quad \omega_{(nn)}^{(0)} = b_{(nn)}, \quad (20)$$

стремящихся неограниченно к (18). Последовательные же приближения к собственным числам  $\lambda_3$  и собственным векторам  $g_{(n)3} = \bar{g}_3$  матрицы  $b_{(nn)} = \varphi_{(nn)}^{-1} a_{(nn)}$  строятся с применением способа Данилевского к подходящим диагональным клеткам  $b_{mm}^{(s)}$  упрощаемых матриц  $b_{(nn)}^{(s)} = \omega_{(nn)}^{(s)}$ . В статье [2] доказана также сходимость  $\omega_{(ss)}^{(s)}$  к  $\omega_{(nn)}$  с ростом  $n$ .

В заключение укажем, что в статье [2] установлен прямым путем следующий окончательный вид клеток  $\omega_{(\alpha_3 \cdot \alpha_3)}$ , входящих в состав матрицы  $\omega_{(nn)}$  клеточно-диагонального строения (17).

$$\omega_{(\theta_\beta, \theta_\beta)} = \begin{bmatrix} \lambda_\beta & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_\beta & 1 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \lambda_\beta & 1 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & -\lambda_\beta & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_\beta \end{bmatrix} \quad (21)$$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Ф. Крутой. Решение по способу наименьших квадратов спектральной задачи для уравнения Гельмгольца на плоскости. Настоящий сборник.
2. Б. Ф. Крутой. Решение спектральной задачи для произвольной матрицы  $A_{(nn)}$  обобщенным способом вращения. Настоящий сборник.