ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ
И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ. С. М. КИРОВА

Том 277 1977

ОБОБЩЕННАЯ СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДВУХ ПРОИЗВОЛЬНЫХ МАТРИЦ $a_{(nn)}$ $\varphi_{(nn)}$ И ЕЕ РЕШЕНИЕ

Б. Ф. КРУТОЙ

(Представлена научным семинаром кафедры инженерной и вычислительной математики)

1. Предположим, что нам заданы две произвольные матрицы $a_{(nn)}$ $\varphi_{(nn)}$, вещественные или комплексные. Тогда может быть поставлена следующая обобщенная спектральная задача:

Определить наборы (спектр) собственных чисел λ и собственных векторов $g_{(n)}=\bar{g}$ для пары матриц $a_{(nn)}$ и $\varphi_{(nn)}$, удовлетворяющие уравнению

$$a_{(nn)}g_{(n)}=\lambda\varphi_{(nn)}g_{(n)}, \tag{1}$$

или в операторном виде

$$A\bar{g}=\lambda\Phi\bar{g}, \tag{1*}$$

где A и Φ — линейные операторы, отвечающие матрицам $a_{(nn)}$ и $\varphi_{(nn)}$ в некоторой отсчетной опоре, а λ и $\bar{g}$ — собственные числа и векторы операторной пары A и Φ.

Задачи подобного рода возникают при решении в замкнутой области $\overline{D}^{(n)}=D^{(n)}+\Gamma$ линейных операторных уравнений

$$L(x)u(x)=f(x), \quad x=(x_1, x_2, ..., x_n), \tag{2}$$

с краевым условием

$$Л(x)u(x)|_{\Gamma}=h(x) \tag{3}$$

на границе Γ области $\overline{D}$, когда требуется найти собственные значения λ и собственные функции $w(x)$ операторов L и $Л$, удовлетворяющие условиям:

$$1)\ L(x)w(x)=\Theta, \qquad 2)\ Л(x)w(x)|_{\Gamma}=h(x), \tag{4}$$

где Θ — нулевой оператор. Тогда решение задачи (4) прямым способом, в котором искомая собственная функция $w(x)$ операторов L, $Л$ задается в виде разложения

$$w(x)\approx\varphi(x)=\sum_{\nu=0}^{m}c_{\nu}\varphi_{\nu}(x). \tag{5}$$

по m опорным взаимонезависимым функциям $\varphi_\nu(x)$, приводит к необходимости решить предварительно обобщенную спектральную задачу (1). Такой, например, случай рассмотрен в моей статье [1] при решении задачи (4) по способу наименьших квадратов.

2. Приступим к решению обобщенной спектральной задачи, задаваемой однородным уравнением (1) с неизвестными λ и $g_{(n)}$. Записав это однородное уравнение в виде

$$(a_{(nn)}-\lambda\varphi_{(nn)})g_{(n)}=0_{(n)}, \tag{1a}$$

мы прежде всего замечаем, что удовлетворим (1a), взяв $g=0$. Если же поставить своей целью определить из (1a) отличные от 0 значения собственного вектора $g_{(n)}$, то этого достигнем, приравняв 0 коэффициент $(a_{(nn)}-\lambda\varphi_{(nn)})$ в уравнении (1a), что равносильно условию

$$|a_{(nn)}-\lambda\varphi_{(nn)}|=0 \tag{6}$$

для определителя $|a_{(nn)}-\lambda\varphi_{(nn)}|$ матричного коэффициента $(a_{(nn)}-\lambda\varphi_{(nn)}$.

Развертывая определитель (6), получим алгебраическое уравнение n-й степени с неизвестным λ

$$|a_{(nn)}-\lambda\varphi_{(nn)}|=\sum_{\varkappa=0}^{n} b_\varkappa\lambda^\varkappa=0. \tag{6*}$$

Решая это уравнение, получим n значений λ_s неизвестного λ, среди которых могут встречаться и комплексные пары вида $\lambda_\nu=\alpha_\nu+i\,\beta_\nu$, $\lambda_{\nu+1}=\alpha_\nu-i\,\beta_\nu$. Возможны также кратные корни λ_β среди n корней λ_s неизвестного λ. Поэтому число r различных корней λ_β может быть и меньше r, так что $r\leqslant n$.

Вставляя найденные $r\leqslant n$ различных корней λ_β уравнения (6*) в свод уравнений (1a), получим связку из r сводов уравнений с неизвестными векторами $\bar g_\beta=g_{(n)\beta}$, — собственными векторами операторной пары A, Φ:

$$a_{(nn)}g_{(n)\beta}=\varphi_{(nn)}g_{(n)\beta}\lambda_\beta, \quad (\beta=1,2,\ldots,r) \tag{7}$$

что можно представить также в матричном виде

$$a_{(nn)}g_{(nr)}=\varphi_{(nn)}g_{(nr)}\lambda_{(rr)}, \tag{7a}$$

где $\lambda_{(nn)}$ — диагональная матрица

$$\lambda_{(rr)}=\begin{bmatrix} \lambda_{11} & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_{22} & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_{\beta\beta} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & \lambda_{rr} \end{bmatrix}, \quad \lambda_{\beta\beta}=\lambda_\beta. \tag{8}$$

Что касается операторного уравнения (1*), то теперь оно принимает следующий вид:

$$A\bar g_\beta=\lambda_\beta\Phi\bar g_\beta, \quad (\beta=1,2,\ldots,r\leqslant n). \tag{7*}$$

Полученное однородное матричное уравнение (7*), где, кроме заданных $a_{(nn)}$ и $\varphi_{(nn)}$, теперь уже известна и диагональная матрица

$\lambda_{(rr)}$, дает для искомой матрицы $g_{(nr)}$ не вполне определенное значение. Объясняется это тем, что каждое входящее в связку (7а) матрично-векторное уравнение (7) с заданным β и искомым вектором $g_{(n)\beta}$ является однородным. Поэтому одна из составляющих $g_{\varkappa\beta}$ в n-мерном векторе $g_{(n)\beta}$ остается неопределенной, и мы примем, что $g_{(n)\beta}=1$.

$$g_{(n)\beta}=1, \quad (\beta=1,\ 2,\ \ldots,\ r\leqslant n). \tag{9}$$

Рассмотренный выше ход решения обобщенной спектральной задачи (1) убеждает нас, что для собственных чисел λ операторной пары A, Φ мы получаем всегда ровно n значений λ_s, так как находим их из алгебраического уравнения n-й степени (6*). Правда, часть $r\leqslant n$ этих корней λ, обозначаемых через λ_β, может быть кратности ∂^β, где $1\leqslant\partial_\beta\leqslant n$. Таким образом,

$$\{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\beta,\ldots,\lambda_r\}\leqslant\{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_s,\ldots,\lambda_n\}. \tag{10}$$

Что касается набора собственных векторов $\bar{g}=g_{(n)}$ для операторной пары A, Φ, то их определение из связки (7а) дает с неизбежностью только $r\leqslant n$ различных значений $\bar{g}_\beta=g_{(n)\beta}$ этих векторов, соответственно $n\leqslant r$ различным значениям λ_β величины λ.

3. Поставим далее задачей при любом значении $r\leqslant n$ числа собственных векторов $\bar{g}_\beta=g_{(n)\beta}$ для операторной пары A, Φ определить еще $n-r$ некоторых присоединенных векторов f_j, $(j=r+1,\ r+2,\ \ldots,\ n)$, которые были бы взаимонезависимы между собой и с r векторами $\bar{g}_\beta$. Такая задача не может быть решена однозначно, но обобщая несколько предложение Жордана [1], мы найдем одно из ее простейших решений.

С этой целью сопоставим каждому собственному вектору $\bar{g}_\beta$, порожденному собственным числом λ_β кратности ∂_β, еще $\partial_\beta-1$ присоединенных векторов $\bar{g}_{\beta\alpha}$, где $\bar{g}_{\beta1}=\bar{g}_\beta$ и $\alpha=2,\ 3,\ \ldots,\ \partial_\beta$. Эту совокупность из ∂_β векторов $\bar{g}_\beta=g_{\beta1}$, $\bar{g}_{\beta\alpha}=\bar{g}_{\beta2}$, $\bar{g}_{\beta3},\ldots$, $\bar{g}_{\beta.\partial\beta}$ свяжем сводом из ∂ векторных взаимонезависимых уравнений следующего простейшего строения:

$$\begin{cases}
1)\ \bar{A}g_{\beta1}=\lambda_\beta\Phi\bar{g}_{\beta1}+0\,\bar{g}_{\beta2}+0\,\bar{g}_{\beta3}+\ldots+0\,\bar{g}_{\beta\cdot\partial_\beta-1}+0\,\bar{g}_{\beta\cdot\partial_\beta}\\
2)\ A\bar{g}_{\beta2}=1\,\bar{g}_{\beta1}+\lambda_\beta\Phi\bar{g}_{\beta2}+0\,\bar{g}_{\beta3}+\ldots+0\,\bar{g}_{\beta\cdot\partial\beta-1}+0\,\bar{g}_{\beta\cdot\partial\beta}\\
3)\ A\bar{g}_{\beta3}=0\,\bar{g}_{\beta1}+1\,\bar{g}_{\beta1}+\lambda_\beta\Phi\bar{g}_{\beta3}+\ldots+0\,\bar{g}_{\beta\cdot\partial\beta-1}+0\,\bar{g}_{\beta\cdot\partial\beta}\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\partial_\beta)\ Ag_{\beta\cdot\partial_\beta}=0\,\bar{g}_{\beta1}+0\,\bar{g}_{\beta2}+0\,\bar{g}_{\beta3}+\cdots+1\,\bar{g}_{\beta\cdot\partial_\beta-1}+\lambda_\beta\Phi\bar{g}_{\beta\cdot\partial_\beta},\\
\qquad(\beta=1,2,\cdots,\ r\leqslant h)
\end{cases} \tag{11*}$$

где первое уравнение этого свода есть уравнение (1*) при $\lambda=\lambda_\beta$.

Свод ∂_β векторных уравнений можно представить также в матрично-операторном виде

$$A[\bar{g}_{\beta1}\bar{g}_{\beta2}\cdots\bar{g}_{\beta\partial\beta}]=\begin{bmatrix}\lambda_\beta\Phi & 0 & 0\cdots\cdots & 0\,0\\ 1 & \lambda_\beta\Phi & 0\cdots\cdots & 0\,0\\ 0\ldots & 1 & \lambda_\beta\Phi\cdots\cdots & 0\,0\\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\\ 0 & 0 & 0 & 1\ \lambda_\beta\Phi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{g}_{\beta1}\\ \bar{g}_{\beta2}\\ \vdots\\ \bar{g}_{\beta\partial\beta}\end{bmatrix}= \tag{11**}$$

$$
=[\bar{g}_{\beta 1}\bar{g}_{\beta 2}\cdots\bar{g}_{\beta\cdot\alpha-1}\cdots\bar{g}_{\beta\alpha}\cdots g_{\beta\partial\beta}]\begin{bmatrix} \lambda_\beta\Phi & 1 & 0\cdots & \cdots 0\cdots & 0 & 0\cdots & \cdots 0 \\ 0 & \lambda_\beta\Phi & 1\cdots & \cdots 0. & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0\cdots & \lambda_\beta\Phi & 1\cdots & 0\cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_\beta\Phi & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0\cdots & \cdots 0. & 0 & 0\ldots & \lambda_\beta\Phi \end{bmatrix},
$$

которому соответствует следующее матрично-векторное соотношение:

$$
a_{(nn)}\left[g^{\beta}_{(n)1}\, g^{\beta}_{(n)2}\cdots g^{\beta}_{(n)\cdot\alpha-1}g^{\beta}_{(n)\alpha}\cdots g^{\beta}_{(n)\partial\beta}\right]=a_{(nn)}g_{(n\partial\beta)}= \tag{11}
$$

$$
=g_{(n\partial\beta)}\begin{bmatrix} \lambda_\beta\varphi_{(nn)} & 1 & 0\ldots & \ldots & 0 & 0\ldots & \ldots 0 \\ 0 & \lambda_\beta\varphi_{(nn)} & 1\ldots & \ldots & 0 & 0\ldots & \ldots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0\ldots & \ldots\lambda_\beta\varphi_{(nn)} & 1 & \ldots & \ldots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0\ldots & \ldots & 0 & 0\ldots & \ldots\lambda_\beta\varphi_{(nn)} \end{bmatrix}=g_{(n\partial_\beta)}\,w_{(\partial\beta\cdot\partial_\beta)}.
$$

Таким образом, каждому кратности ∂_β собственному числу λ_β операторной пары A, Φ отвечает матричное равенство

$$
a_{(nn)}g_{(n\partial\beta)}+g_{(n\partial\beta)}w_{(\partial\beta\cdot\partial_\beta)}\,, \tag{11a}
$$

где $w_{(\partial\beta\partial\beta)}$ — обобщенная матрица

$$
w_{(\partial_\beta\partial_\beta)}=\begin{bmatrix} \lambda_\beta\varphi_{(nn)} & 1 & 0\ldots & \ldots 0 & 0\ldots & \ldots 0 \\ 0 & \lambda_\beta\varphi_{(nn)} & 1\ldots & \ldots 0 & 0\ldots & \ldots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0\ldots & \lambda_\beta\varphi_{(nn)} & 1\ldots & \ldots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0\ldots & \ldots 0 & 0\ldots & \ldots\lambda_\beta\varphi_{(nn)} \end{bmatrix} \tag{12}
$$

Теперь вместо равенства (7а)

$$
a_{(nn)}g_{(nr)}=\varphi_{(nn)}g_{(nr)}\lambda_{(rr)}\,, \tag{7a}
$$

где

$$
g_{(nr)}=[g_{(n)1}g_{(n)2}\cdots g_{(n)\beta}\cdots g_{(n)r}],\ (r\leqslant n) \tag{13}
$$

и $\lambda_{(rr)}$ — чисто диагональная матрица, мы можем составить более общее равенство:

$$
a_{(nn)}g_{(nn)}=\varphi_{(nn)}g_{(nn)}w_{(nn)}\,, \tag{14}
$$

в котором

$$
1)\quad g_{(nn)}=[g_{(n\partial_1)}\,g_{(n\partial_2)}\cdots g_{(n\partial_\beta)}\cdots g_{(n\partial_r)}]\,, \tag{15}
$$

$$
2)\quad g_{(n\partial_\beta)}=\left[g^{\beta}_{(n)1}g^{\beta}_{(n)2}\cdots g^{\beta}_{(n)\alpha}\cdots g^{\beta}_{(n)\partial_\beta}\right], \tag{16}
$$

$$
3)\quad w_{(nn)}=\begin{bmatrix} w_{(\partial_1\partial_1)} & 0_{(\partial_1\partial_2)}\cdots & 0_{(\partial_1\partial_\beta)} & \cdots 0_{(\partial_1\partial_r)} \\ 0_{(\partial_2\partial_1)} & w_{(\partial_2\partial_2)} & 0_{(\partial_2\partial_\beta)} & \cdots 0_{(\partial_2\partial_r)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0_{(\partial_\beta\partial_1)} & 0_{(\partial_\beta\partial_2)}\cdots & w_{(\partial_\beta\partial_\beta)} & \cdots 0_{(\partial_\beta\partial_r)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0_{(\partial_r\partial_1)} & 0_{(\partial_r\partial_2)}\cdots & 0_{(\partial_r\partial_\beta)} & \cdots w_{(\partial_r\partial_r)} \end{bmatrix} \tag{17}
$$

Таким образом, $w_{(nn)}$ есть клеточно-диагональная матрица. Из равенства (14) вытекает, что эта матрица $w_{(nn)}$ может быть выражена непосредственно через матрицы $a_{(nn)}$, $\varphi_{(nn)}$ и $a_{(nn)}$.

$$w_{(nn)}=\overset{-1}{g}_{(nn)}\overset{-1}{\varphi}_{(nn)}a_{(nn)}g_{(nn)}=\overset{-1}{g}_{(nn)}b_{(nn)}g_{(nn)}, \tag{18}$$

$$b_{(nn)}=\overset{-1}{\varphi}_{(nn)}a_{(nn)}. \tag{19}$$

Рассмотрение равенства (18) с обозначением (19) показывает, что хотя согласно (17) и (12) матрица $w_{(nn)}$ представляется в обобщенном клеточно-диагональном виде, но в действительности $w_{(nn)}$ есть обычная клеточно-диагональная матрица. Сказанное вытекает из того, что в определяющее матрицу $w_{(nn)}$ равенство (18) входят обычные nn-матрицы $a_{(nn)}$, $g_{(nn)}$, $\overset{-1}{\varphi}_{(nn)}$ и $\overset{-1}{g}_{(nn)}$. Действительный вид входящих в $w_{(nn)}$ клеток $w_{(\partial_\beta\cdot\partial_\beta)}$ будет указан позже.

4. Изложенный здесь способ решения обобщенной спектральной задачи (1) для пары матриц $a_{(nn)}$, $\varphi_{(nn)}$ произвольного вида оказывается затруднительным при большом n. Именно, очень трудным становится тогда расчет коэффицента b_s алгебраического уравнения n-й степени (6*) путем раскрытия соответствующего определителя $|a_{(nn)}-\lambda\varphi_{(nn)}|$. Поэтому целесообразно в таких случаях строить непосредственно искомые матрицы $g_{(nn)}$ и $w_{(nn)}$, исходя из уравнения (18) и применяя способ последовательных вращений.

Приведение уравнения (14) к виду (18) равносильно тому, что обобщенную спектральную задачу (1) для матриц $a_{(nn)}$, $\varphi_{(nn)}$

$$a_{(nn)}g_{(n)}=\lambda\varphi_{(nn)}g_{(n)}. \tag{1}$$

мы заменяем на обычную спектральную задачу для матрицы

$$b_{(nn)}=\overset{-1}{\varphi}_{(nn)}a_{(nn)};$$

$$b_{(nn)}g_{(n)}=\lambda g_{(n)}. \tag{1.0}$$

Поэтому при большом n обобщенную спектральную задачу (1), представленную в виде (1.0), целесообразно решать предложенным мной смешанным способом Данилевского и последовательных вращений, подробное изложение которого дано в статье [2].

В указанном способе матрица упрощенного строения $w_{(nn)}$, определяемая точным выражением (18)

$$w_{(nn)}=\overset{-1}{g}_{(nn)}b_{(nn)}g_{(nn)},\ b_{(nn)}=\overset{-1}{\varphi}_{(nn)}a_{(nn)}, \tag{18}$$

находится из последовательности расчетных равенств

$$w_{(nn)}^{(s+1)}=\left(g_{(nn)}^{(s)}\right)^{-1}w_{(nn)}^{(s)}g_{(nn)}^{(s)}=\sigma_{(nn)}^{(s)}\,b_{(nn)}^{(s)}g_{(nn)}^{(s)}=b_{(nn)}^{(s+1)},\ w_{(nn)}^{(0)}=b_{(nn)}, \tag{20}$$

стремящихся неограниченно к (18). Последовательные же приближения к собственным числам λ_β и собственным векторам $g_{(n)\beta}=\bar{g}_\beta$ матрицы $b_{(nn)}=\overset{-1}{\varphi}_{(nn)}a_{(nn)}$ строятся с применением способа Данилевского к подходящим диагональным клеткам $b_{mm)}^{(s)}$ упрощаемых матриц $b_{(nn)}^{(s)}=w_{(nn)}^{(s)}$. В статье [2] доказана также сходимость $w_{(ss)}^{(s)}$ к $w_{(nn)}$ с ростом n.

В заключение укажем, что в статье [2] установлен прямым путем следующий окончательный вид клеток $w_{(\partial_\beta\cdot\partial_\beta)}$, входящих в состав матрицы $w_{(nn)}$ клеточно-диагонального строения (17).

$$
w_{(\partial_\beta \cdot \partial_\beta)} = \begin{bmatrix} \lambda_\beta & 1 & 0 \cdot \cdot \cdot \cdot 0 & 0 \cdot \cdot \cdot 0 & 0 \\ 0 & \lambda_\beta & 1 . . . . 0 & 0 . . . 0 & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 \cdot \cdot \cdot \cdot . \lambda_\beta & 1 . . . 0 & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 \cdot \cdot \cdot \cdot 0 & 0 \cdot \cdot \cdot \lambda_\beta & 1 \\ 0 & 0 & 0 \cdot \cdot \cdot \cdot 0 & 0 \cdot \cdot \cdot 0 & \lambda_\beta \end{bmatrix} \qquad (21)
$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Ф. Крутой. Решение по способу наименьших квадратов спектральной задачи для уравнения Гельмгольца на плоскости. Настоящий сборник.

2. Б Ф. Крутой. Решение спектральной задачи для произвольной матрицы $a_{(nn)}$ обобщенным способом вращения. Настоящий сборник.