ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ
И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ. С. М. КИРОВА

Том 277 1977

РЕШЕНИЕ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНОЙ МАТРИЦЫ $a_{(nn)}$ ОБОБЩЕННЫМ СПОСОБОМ ВРАЩЕНИЯ

Б. Ф. КРУТОЙ

(Представлена научным семинаром кафедры инженерной и вычислительной математики)

1. Предположим, что нам задана произвольная равнобокая матрица $a_{(nn)}$, вещественная или комплексная. Тогда для такой матрицы $a_{(nn)}$ может быть поставлена соответствующая спектральная задача:

Найти наборы (спектр) собственных чисел λ и собственных векторов $q_{(n)}=\bar{g}$ матрицы $a_{(nn)}$, удовлетворяющие уравнению

$$a_{(nn)}g_{(n)}=\lambda\, e_{(nn)}g_{(n)}, \tag{1}$$

или в операторном виде

$$A\bar{g}=\lambda E\bar{g}, \tag{1*}$$

где A и E — линейные операторы, отвечающие данной $a_{(nn)}$ и единичной $e_{(nn)}$ матрицам в некоторой отсчетной опоре, λ и $\bar{g}$ — собственные числа и векторы оператора A.

Для решения поставленной спектральной задачи представим уравнение (1) в виде

$$(a_{(nn)}-\lambda\, e_{(nn)})g_{(n)}=0_{(n)}. \tag{2}$$

Отсюда вытекает прежде всего, что уравнение (2) удовлетворится, если положить $g_{(n)}=0_{(n)}$. Если же поставить целью найти набор отличных от нуля собственных векторов $g_{(n)\varkappa}$, то для этого нужно потребовать, чтобы первый множитель $a_{(nn)}-\lambda e_{(nn)}$ обращался в нуль, что равносильно условию

$$|\, a_{(nn)}-\lambda\, e_{(nn)}\,|=0. \tag{3}$$

для соответствующего определителя $|a_{(nn)}-\lambda e_{(nn)}|$.

После раскрытия определителя (3) получим алгебраическое уравнение n-й степени с неизвестным λ

$$|\, a_{(nn)}-\lambda e_{(nn)}\,|=\sum_{\nu=0}^{n} b_\nu \lambda^\nu=0, \tag{3a}$$

обладающее всегда n корнями λ_s, некоторые из которых возможно будут комплексными парами вида $\alpha_\varkappa \pm i\beta_\varkappa$. Кроме того, среди n корней

λ_s уравнения (3а) могут встречаться также равные между собой. Поэтому число r различных между собой корней λ_β уравнения (3а) может быть и меньше $n: r \leqslant n$.

Если мы вставим $r \leqslant n$ различных корней λ_β в матричное уравнение (2), то получим связку из r уравнений вида

$$a_{(nn)}g_{(n)\beta}=\lambda_\beta e_{(nn)}g_{(n)\beta}, \quad (\beta=1, 2, \ldots, r \leqslant n) \tag{4}$$

относительно $r \leqslant n$ соответствующих собственных векторов $g_{(n)\beta}$, что можно представить также матричным уравнением

$$a_{(nn)}g_{(nr)}=e_{(nn)}g_{(nr)}\lambda_{(rr)}=g_{(nr)}\lambda_{(rr)} \quad (r \leqslant n), \tag{4*}$$

причем в (4) и (4*)

$$1)\ g_{(n)\beta}=\begin{bmatrix} g_{1\beta} \\ g_{2\beta} \\ \vdots \\ g_{\nu\beta} \\ \vdots \\ g_{n\beta} \end{bmatrix},\quad 2)\ \lambda_{(rr)}=\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & & \lambda_\beta & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & \lambda_r \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Так как каждое β-ое уравнение связки (4) с неизвестным собственным вектором $g_{(n)\beta}$ является однородным, то одна из составляющих $g_{\nu\beta}$ этого вектора будет произвольной, и мы примем, что

$$g_{(n)\beta}=1, \qquad (\beta=1, 2, \ldots, r \leqslant n). \tag{6}$$

Если $r=n$, то в уравнении (4*) имеем $g_{(nr)}=g_{(nn)}$, $\lambda_{(rr)}=\lambda_{(nn)}$ и мы найдем тогда, что

$$\lambda_{(nn)}=\overset{-1}{g}_{(nn)}a_{(nn)}g_{(nn)}=\text{Ж}_{(nn)}a_{(nn)}g_{(nn)}=\omega_{(nn)}. \tag{7}$$

Отсюда видно, что если $r=n$, то в отсчетной опоре их n собственных векторов $g_{(n)\beta}$ исходная матрица $a_{(nn)}$ становится диагональной $\lambda_{(nn)}=\omega_{(nn)}$ с простейшим строением (5).

Если же $r<n$, то мы поставим задачей к r собственным векторам $g_{(n)\beta}$ подыскать еще $n-r$ независимых присоединенных векторов $f_{(n)j}$, $j=r+1, r+2, \ldots, n$ таких, чтобы в отсчетной опоре из r собственных векторов $g_{(n)\beta}$ и $n-r$ присоединенных векторов $f_{(n)j}$ преобразованная матрица $\omega_{(nn)}$, где

$$\omega_{(nn)}=[g_{(nr)}f_{(n.n-r)}]^{-1}a_{(nn)}[g_{(nr)}f_{(n.n-r)}], \tag{8}$$

имела наиболее простой вид.

Следуя Жордану [1], эти $n-r$ присоединенных векторов $f_{(n)j}$ будем определять по частям, приписав к каждому собственному вектору $g_{(n)\beta}$, порожденному собственным числом λ_β кратности ∂_β, еще $\partial_\beta-1$ присоединенных векторов $f_{(n)j}=\overset{\alpha}{g}_{(n)\beta}$, $\alpha=2, 3, \ldots, \partial_\beta$, и положив $g_{(n)\beta}=\overset{1}{g}_{(n)\beta}$.

Чтобы все n векторов $g_{(n)\beta}=\overset{1}{g}_{(n)\beta}, \overset{\alpha}{g}_{(n)\beta}$ были взаимонезависимы и чтобы преобразованная согласно (8) матрица $\omega_{(nn)}$ имела наиболее простое строение, Жордан предложил определять каждую β-ую совокупность из ∂_β векторов $g_{(n)\beta}=\overset{1}{g}_{(n)\beta}$, $\overset{\alpha}{g}_{(n)\beta}$ из следующего свода ∂_β векторных уравнений

$$
\begin{cases}
A\bar{g}_{\beta1}=\lambda_\beta\bar{g}_{\beta1}+0\,\bar{g}_{\beta2}+0\,\bar{g}_{\beta3}+\cdots+0\,\bar{g}_{\beta\cdot\partial_\beta-1}+0\,\bar{g}_{\beta\cdot\partial_\beta}\\
A\bar{g}_{\beta\alpha}=1\,\bar{g}_{\beta1}+\lambda_\beta\bar{g}_{\beta2}+0\,g_{\beta3}+\cdots+0\,\bar{g}_{\beta\cdot\partial_\beta-1}+0\,\bar{g}_{\beta\cdot\partial_\beta}\\
A\bar{g}_{\beta3}=0\bar{g}_{\beta1}+1\bar{g}_{\beta2}+\lambda_\beta\bar{g}_{\beta3}+\cdots\quad 0\,\bar{g}_{\beta\cdot\partial_\beta-1}+0\,g_{\beta\cdot\partial_\beta}\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
A\bar{g}_{\beta\cdot\partial_\beta}=0\,\bar{g}_{\beta1}+0\bar{g}_{\beta2}+0\,\bar{g}_{\beta3}+\cdots 1\bar{g}_{\beta\cdot\partial_\beta-1}+\lambda_\beta g_{\beta\cdot\partial_\beta}.
\end{cases}
\tag{9**}
$$

Здесь A — линейный оператор, которому в исходной отсчетной опоре соответствует матрица $a_{(nn)}$, а в опоре из r собственных векторов $\bar{g}_{(n)\beta}=\bar{g}_\beta=\bar{g}_{\beta1}$ и $n-r$ присоединенных векторов $f_{(n)j}=g^{\alpha}_{(n)\beta}=\bar{g}_{\beta\alpha}$ соответствует матрица $\omega_{(nn)}$, определяемая согласно (8).

Если далее свод (9**) из ∂_β векторных уравнений запишем в более сжатом виде

$$
A[\bar{g}_{\beta2}\ldots\bar{g}_{\beta\alpha}\ldots g_{\beta\cdot\partial_\beta}]^*=\begin{bmatrix}
\lambda_\beta & 0 & 0\ldots0 & 0\ldots0 & 0\\
1_{21} & \lambda_\beta & 0\ldots0 & 0\ldots0 & 0\\
0 & 1_{32} & \lambda_\beta\ldots0 & 0\ldots0 & 0\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
0 & 0 & 0\ldots1_{\alpha,\alpha-1}\lambda_\beta\ldots & 0 & 0\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
0 & 0 & 0\ldots\ 0 & 0\ldots1 & \lambda_\beta
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\bar{g}_{1\beta}\\ \bar{g}_{2\beta}\\ \vdots\\ \bar{g}_{\alpha\beta}\\ \vdots\\ \bar{g}_{\partial_\beta\cdot\beta}
\end{bmatrix}=
$$

$$
=[\bar{g}_{\beta1}\bar{g}_{\beta2}\cdots\bar{g}_{\beta\alpha}\cdots\bar{g}_{\beta\cdot\partial_\beta}]^*\begin{bmatrix}
\lambda_\beta & 1^*_{12} & 0\ldots0 & 0\ldots0\\
0 & \lambda_\beta & 1^*_{23}\ldots0 & 0\ldots0\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
0 & 0 & 0\ldots\lambda_\beta & 1^*_{\alpha,\alpha-1}\ldots0\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
0 & 0 & 0\ldots0 & 0\ldots\lambda_\beta
\end{bmatrix},
\tag{9*}
$$

то векторно-матричному уравнению (9*) будет соответствовать следующее матричное уравнение

$$
a_{(nn)}g_{(n\cdot\partial_\beta)}=g_{(n\cdot\partial_\beta)}\omega_{(\partial_\beta\cdot\partial_\beta)},\quad(\beta=1,\ 2,\ \ldots,\ r\leqslant n),
\tag{9}
$$

где обозначено

$$
1)\ g_{(n.\partial_\beta)}=[g^{\beta}_{(n)1}g^{\beta}_{(n)2}\cdots g^{\beta}_{(n)\alpha}\cdots g^{\beta}_{(n)\partial_\beta}],
$$

$$
2)\ \omega_{(\partial_\beta\cdot\partial_\beta)}=\begin{bmatrix}
\lambda_\beta & 1 & 0\ldots0 & 0\ldots0\\
0 & \lambda_\beta & 1 & 0\quad 0\quad 0\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
0 & 0 & 0\ldots\lambda_\beta & 1\ldots0\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
0 & 0 & 0\ldots0 & 0\ldots\lambda_\beta
\end{bmatrix}.
\tag{10}
$$

Клетка $\omega_{(\partial_\beta\cdot\partial_\beta)}$ простого строения (10) называется ящиком Жордана.

Из проведенного исследования теперь вытекает, что если в преобразующей матрице $[g_{(nr)}f_{(n.n-r)}]$ из равенства (8) мы переставим столбцы в соответствии с предложением Жордана (9**), то получим преобразующую матрицу $g_{(nn)}$, которая будет иметь следующее строение

$$
g_{(nn)}=[g_{(n\cdot\partial_1)}g_{(n\cdot\partial_2)}\cdots g_{(n\cdot\partial_\beta)}\cdots g_{(n\cdot\partial_r)}],\quad(r\leqslant n).
\tag{11}
$$

Тогда вместо выражения (8) для расчета матрицы $\omega_{(nn)}$ найдем равенство того же вида

$$\omega_{(nn)}=\overset{-1}{g}_{(nn)}a_{(nn)}g_{(nn)}=Ж_{(nn)}a_{(nn)}g_{(nn)}. \qquad (12)$$

Выясним строение вычисленной согласно (12) матрицы $\omega_{(nn)}$. С этой целью сложим все r векторных уравнений (9). Тогда мы получим

$$\sum_{\beta=1}^{r} a_{(nn)}g_{(n\cdot\partial_\beta)}=\sum_{\beta=1}^{r} g_{(n\cdot\partial_\beta)}\omega_{(\partial_\beta\cdot\partial_\beta)}=\sum_{\beta=0}^{n} g_{(n\cdot\partial_\beta)}\omega_{(\partial_\beta\cdot\partial_\varkappa)},\ (r\leqslant n),$$

где

$$\omega_{(\partial_\beta\cdot\partial_\beta)}=\begin{cases}\omega_{(\partial_\beta\cdot\partial_\beta)}, & \text{если } \varkappa=\beta\\ 0_{(\partial_\beta\cdot\partial_\varkappa)}, & \text{если } \varkappa\neq\beta.\end{cases} \qquad (13)$$

Отсюда вытекает, что матрица $\omega_{(nn)}=[\omega_{(\partial_\beta\cdot\partial_\varkappa)}]_1^r$, определяемая согласно (12), имеет следующее строение:

$$\omega_{(nn)}=\begin{bmatrix}\omega_{(\partial_1\cdot\partial_1)} & 0_{(\partial_1\cdot\partial_2)}\cdots & 0_{(\partial_1\cdot\partial_\beta)}\cdots & 0_{(\partial_1\cdot\partial_r)}\\ 0_{(\partial_2\cdot\partial_1)} & \omega_{(\partial_2\cdot\partial_2)}\cdots & 0_{(\partial_2\cdot\partial_\beta)}\cdots & 0_{(\partial_2\cdot\partial_r)}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0_{(\partial_\beta\cdot\partial_1)} & 0_{(\partial_\beta\cdot\partial_2)}\cdots & \omega_{(\partial_\beta\cdot\partial_\beta)}\cdots & 0_{(\partial_\beta\cdot\partial_r)}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0_{(\partial_r\cdot\partial_1)} & 0_{(\partial_r\cdot\partial_2)}\cdots & 0_{(\partial_r\partial_\beta)}\cdots & \omega_{(\partial_r\cdot\partial_r)}\end{bmatrix},\ (r\leqslant n) \qquad (14)$$

с ящиками Жордана $\omega_{(\partial_\beta\cdot\partial_\beta)}$ простейшего вида (10).

2. Мы дали решение спектральной задачи (1), сведя его к последовательности уравнений (3а), (4*), (9)

$$1)\ |a_{(nn)}-\lambda e_{(nn)}|=\sum_{\nu=0}^{n} b_\nu\lambda^\nu=0;\quad 2)\ a_{(nn)}g_{(nr)}=g_{(nr)}\lambda_{(rr)},\ (r\leqslant n) \qquad (15)$$

$$3)\ a_{(nn)}g_{(n\cdot\partial_\beta)}=g_{(n\cdot\partial_\beta)}\omega_{(\partial_\beta\cdot\partial_\beta)},\qquad (\beta=1,2,\ldots,\ r\leqslant n)$$

с завершающим представлением (12)

$$\omega_{(nn)}=\overset{-1}{g}_{(nn)}a_{(nn)}g_{(nn)}=Ж_{(nn)}a_{(nn)}g_{(nn)} \qquad (12)$$

для искомой матрицы простейшего строения $\overset{\bullet}{\omega}_{(nn)}$.

Однако такой путь решения спектральной задачи (1) целесообразен только при $n\leqslant 4$. Если же $4<n\leqslant 49$, то в случае решения этой задачи на ЦВМ вроде БЭСМ-4 нужно применить способ Данилевского [2], для которого имеются на этих машинах готовые программы на языке «Алгол-60».

Наконец, при $n>15$-20 целесообразно, а при $n>49$ — совершенно необходимо для решения спектральной задачи (1) применять те или иные способы последовательных приближений. Эти способы дают преобразующую матрицу $g_{(nn)}$ и матрицу простейшего строения $\omega_{(nn)}$ минуя совершенно неосуществимую при большом n предварительную ступень развертывания определителя $|a_{(nn)}-\lambda e_{(nn)}|$ в соответствующий многочлен $\sum_{\nu=0}^{n} b_\nu\lambda^\nu$.

Один способ такого рода предложен В. В. Воеводиным в [3], но существенным недостатком его способа является необходимость двухступенчатого преобразования исходной матрицы $a_{(nn)}$: сначала добиваются уменьшения размеров $|a_{rs}|$ всех составляющих a_{rs} матрицы $a_{(nn)}$, выполняют ее «обтесывание», затем применяют способ вращений для приведения «обтесанной» матрицы $\tilde{a}_{(nn)}$ к упрощенному виду $\omega_{(nn)}$. Кроме того, у Воеводина слабо обоснована необходимость предварительного «обтесывания» исходной матрицы $a_{(nn)}$ и слишком сложен алгоритм перехода от $a_{(nn)}$ к $\tilde{a}_{(nn)}$.

В действительности мысль Воеводина сначала «обтесать» исходную матрицу $a_{(nn)}$, а затем уже применять способ вращения вызвана слабой сходимостью взятой им той простейшей разновидности способа вращений, которая была предложена Якоби еще в прошлом столетии для частного случая симметричной или эрмитовой матрицы $a_{(nn)}$ [2].

2. Если бы Воеводин сумел обобщить надлежащим образом способ Якоби на решение спектральной задачи в случае произвольной матрицы $a_{(nn)}$, то не понадобился бы и предварительный переход от исходной матрицы $a_{(nn)}$ к «обтесанной» матрице $\tilde{a}_{(nn)}$.

Поэтому сейчас мы займемся разысканием такого обобщения для первоначального способа Якоби, которое давало бы решение спектральной задачи для любой матрицы $a_{(nn)}$ и обладало достаточной и управляемой нами скоростью сходимости. Сущность предлагаемого обобщенного способа Якоби заключается в следующем.

3. Прежде всего по всем строкам $j=1, 2, ..., n$ исходной матрицы $a_{(nn)}$ образуем суммы $Ц_j^0$, где

$$1)\ Ц_j^{(0)}=\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}|a_{jk}|^2, \qquad 2)\ |a_{j\sigma}|^2=a_{jk}\overline{a}_{jk}=(\alpha_{jk}\pm i\,\beta_{jk})=\alpha_{ik}^2+\beta_{jk}^2, \qquad (16)$$

и среди этих сумм $Ц_j^{(0)}$ выделим $m<n$ наибольших $Ц_s^{(0)}, Ц_t^{(0)},..., Ц_\omega^{(0)}$. Затем в исходной матрице $a_{(nn)}$ отберем m^2 составляющих $a_{\mu\nu}$, находящихся на пересечении выделенных m строк $\mu=s, t, ..., w$ и соответствующих m столбцов $\nu=s, t, ..., w$, и расположим указанные m^2 чисел $a_{\mu\nu}$ в виде вспомогательной матрицы $a_{(mm)}^{st...w}=a_{(mm)}^{(0)}$ с тем же взаимным расположением строк и столбцов, что и в исходной матрице $a_{(nn)}$. Таким образом,

$$a_{(mm)}^{st...w}=a_{(mm)}^{(0)}=\begin{bmatrix} a_{ss} & a_{st} \ldots & a_{s\nu} \ldots & a_{sw} \\ a_{ts} & a_{tt} \ldots & a_{t\nu} \ldots & a_{tw} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{\mu s} & a_{\mu t} \ldots & a_{\mu\nu} \ldots & a_{\mu w} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{ws} & a_{wt} \ldots & a_{w\nu} \ldots & a_{ww} \end{bmatrix}. \qquad (17)$$

Теперь для указанной вспомогательной матрицы $a_{(mm)}^{st...w}=a_{(mm)}^{(0)}$ нужно рассчитать способом Данилевского набор различных собственных чисел λ_β кратности δ_β и отвечающую им матрицу $g_{(mm)}^{(0)}$ основных $g_{(m1)}^{\beta}$ и присоединенных $g_{(m1)}^{\beta\alpha}$ векторов. Далее полученную матрицу $g_{(mm)}^{(0)}$ пересчитываем в приведенную $\tilde{g}_{(mm)}^{(0)}$, столбцы которой $\tilde{g}_{(m)\varkappa}^{\varkappa}$ удовлетворяют условию $|g_{(m)\varkappa}|=1$. Кроме того, для приведенной матрицы $\tilde{g}^{(0)}_{(mm)}$ вычисляем обратную к ней матрицу $(\tilde{g}^{(0)}_{(mm)})^{-1} = \tilde{ж}^{(0)}_{(mm)}$. В заключение с помощью приведенных матриц $\tilde{g}^{(0)}_{(mm)}$ и $\tilde{ж}^{(0)}_{(mm)}$ строим соответствующие преобразующие матрицы $\tilde{g}^{(0)}_{(nn)}$ и $\tilde{ж}^{(0)}_{(nn)}$. Это построение матриц $\tilde{g}^{(0)}_{(nn)}$ и $\tilde{ж}^{(0)}_{(nn)}$ по найденным матрицам $\tilde{g}^{(0)}_{(mm)}$ и $\tilde{ж}^{(0)}_{(mm)}$ выполняется так. Если матрицы $\tilde{g}^{(0)}_{(mm)}$ и $\tilde{ж}^{(0)}_{(mm)}$ представим в виде

$$\tilde{g}^{(0)}_{(mm)}=\begin{bmatrix} \tilde{g}_{ss}\tilde{g}_{st} \dots \tilde{g}_{s\nu} \dots \tilde{g}_{sw} \\ \tilde{g}_{ts}\tilde{g}_{tt} \dots \tilde{g}_{t\nu} \dots \tilde{g}_{tw} \\ \dots\dots\dots\dots \\ \tilde{g}_{\mu s}\tilde{g}_{\mu t} \dots \tilde{g}_{\mu\nu} \dots \tilde{g}_{\mu w} \\ \dots\dots\dots\dots \\ \tilde{g}_{ws}\tilde{g}_{wt} \dots \tilde{g}_{w\nu} \dots \tilde{g}_{ww} \end{bmatrix}, \ |\tilde{g}_{(m)\varkappa}|=1, \ (\varkappa=1,2,\dots,m) \qquad (18.1)$$

$$[\tilde{g}^{(0)}_{(mm)}]^{-1}=\tilde{ж}^{(0)}_{(mm)}=\begin{bmatrix} \tilde{ж}_{ss}\tilde{ж}_{st} \dots \tilde{ж}_{s\nu} \dots \tilde{ж}_{sw} \\ \tilde{ж}_{ts}\tilde{ж}_{tt} \dots \tilde{ж}_{t\nu} \dots \tilde{ж}_{tw} \\ \dots\dots\dots\dots \\ \tilde{ж}_{\mu s}\tilde{ж}_{\mu t} \dots \tilde{ж}_{\mu\nu} \dots \tilde{ж}_{\mu w} \\ \dots\dots\dots\dots \\ \tilde{ж}_{ws}\tilde{ж}_{wt} \dots \tilde{ж}_{w\nu} \dots \tilde{ж}_{ww} \end{bmatrix}, \ |\tilde{ж}_{(m)\varkappa}|=1 \ (\varkappa=1,2,\dots,n) \qquad (18.2)$$

то порожденную вспомогательной матрицей $\tilde{g}_{(mm)}$ преобразующую матрицу $\tilde{g}^{(0)}_{(nn)}$ зададим следующим образом:

$$\tilde{g}^{(0)}_{(nn)}=\begin{bmatrix} e_{11}e_{12} \dots e_{1s} \dots e_{1t} \dots e_{1\nu} \dots e_{1w} \dots e_{1.n-1}\ e_{1n} \\ e_{21}e_{22} \dots e_{2s} \dots e_{2t} \dots e_{2\nu} \dots e_{2w} \dots e_{2.n-1}\ e_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ e_{s1}e_{s2} \dots \tilde{g}_{ss} \dots \tilde{g}_{st} \dots \tilde{g}_{s\nu} \dots \tilde{g}_{sw} \dots e_{s.n-1}\ e_{sn} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ e_{t1}e_{t2} \quad \tilde{g}_{ts} \dots \tilde{g}_{tt} \dots \tilde{g}_{t\nu} \dots \tilde{g}_{tw} \dots e_{t.n-1}\ e_{tn} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ e_{\mu1}e_{\mu2} \dots \tilde{g}_{\mu s} \dots \tilde{g}_{\mu t} \dots \tilde{g}_{\mu\nu} \dots \tilde{g}_{\mu w} \dots e_{\mu.n-1}e_{\mu n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ e_{w1}e_{w2} \dots \tilde{g}_{ws} \dots \tilde{g}_{wt} \dots \tilde{g}_{w\nu} \dots \tilde{g}_{ww} \dots e_{w.n-1}e_{wn} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ e_{n-1.1} \quad e_{n-1.2} \dots e_{n-1.s} \dots e_{n-1.t} \dots e_{n-1.\nu} \dots e_{n-1.w} \dots e_{n-1.n-1}e_{n-1.n} \\ e_{n1}e_{n2} \dots e_{ns} \dots e_{nt} \dots e_{n\nu} \dots e_{nw} \dots e_{n.n-1}\ e_{nn} \end{bmatrix}, e_{\varkappa\lambda}=\begin{cases} +1, \varkappa=\lambda \\ 0. \ \varkappa\neq\lambda \end{cases} \qquad (19.0)$$

и такое же строение будет иметь обратная преобразующая матрица $[\tilde{g}^{(0)}_{(nn)}]^{-1}=\tilde{ж}^{(0)}_{(nn)}$, получаемая путем замены в (19.0) рассредоточенной матрицы $\tilde{g}^{(0)}_{(mm)}$ на обратную ей $\tilde{ж}^{(0)}_{(mm)}$.

Построив преобразующие матрицы $\tilde{g}^{(0)}_{(nn)}$ и $\tilde{ж}^{(0)}_{(nn)}$ первого приближения, вычисляем согласно (12) соответствующее первое приближение $\omega^{(1)}_{(nn)}=a^{(1)}_{(nn)}$ для упрощенной матрицы $\omega_{(nn)}$.

$$\omega^{(1)}_{(nn)}=(\tilde{g}^{(0)}_{(nn)})^{-1}a_{(nn)}\tilde{g}^{(0)}_{(nn)}=\tilde{ж}^{(0)}_{(nn)}\omega^{(0)}\tilde{g}^{(0)}_{(nn)}=a^{(1)}_{(nn)}, \qquad (20.1)$$

где мы обозначили $a_{(nn)}=\omega^{(0)}_{(nn)}=a^{(0)}_{(nn)}$.

Выясним строение найденной матрицы $\omega^{(1)}_{(nn)}=a^{(1)}_{(nn)}$. С этой целью заметим, что если бы вместо преобразования (20) мы взяли преобразование

$$\omega^{(1)}_{(mm)}=\tilde{ж}^{(0)}_{(mm)}a^{rs\ldots w}_{(mm)}\tilde{g}^{(0)}_{(mm)}=\tilde{ж}^{(0)}_{(mm)}a^{(0)}_{(mm)}g^{(0)}_{(mm)}, \qquad (21.1)$$

то получили бы матрицу $\omega^{(1)}_{(mm)}$ чисто диагонального вида (5.2), когда все m собственных чисел λ_s — различные; или же получили бы матрицу $\omega^{(1)}_{(mm)}$, несколько осложненную ящиками Жордана (10.2), когда среди собственных чисел λ_s встречаются кратные λ_β. Общее же преобразование (20) отличается от частного преобразования (21) в двух отношениях:

а) матрица $a^{rs\ldots w}_{(mm)}$ заменена матрицей $a_{(nn)}$;

б) вместо матриц $\tilde{g}^{(0)}_{(mm)}$, $\tilde{ж}^{(0)}_{(mm)}$ взяты матрицы $\tilde{g}^{(0)}_{(nn)}$, $\tilde{ж}^{(0)}_{(nn)}$, которые получаются из единичной матрицы $e_{(nn)}$, если ее составляющим $e_{\mu\nu}$ присвоить соответствующие значения $\tilde{g}_{\mu\nu}$, $\tilde{ж}_{\mu\nu}$ составляющих в матрицах $\tilde{g}^{(0)}_{(mm)}$, $\tilde{ж}^{(0)}_{(mm)}$.

Поэтому в общей матрице $\omega^{(1)}_{(nn)}$ на соответственных местах $\mu\nu$ будут стоять те же значения $\omega^{(1)}_{\mu\nu}=\lambda_\beta$, 1, 0, что и в частной матрице $\omega^{(1)}_{(mm)}$. Во всех же других местах $\tau\sigma$ матрицы $\omega^{(1)}_{(nn)}$ будут находиться какие-то другие числа $\omega^{(1)}_{\tau\sigma}$, вычисляемые согласно (20.1).

$$\omega^{(1)}_{\tau\sigma}=\sum_{\varkappa=1}^{n}\sum_{\rho=1}^{n} ж^{(1)}_{\tau\varkappa}a_{\varkappa\rho}g^{(1)}_{\rho\sigma}. \qquad (22)$$

Таким образом, можно сказать, что общая матрица $\omega^{(1)}_{(nn)}$ воспроизводит на соответственных местах $\mu\nu$ частную матрицу $\omega^{(1)}_{(mm)}$.

Выяснив строение первого приближения $\omega^{(1)}_{(nn)}=a^{(1)}_{(nn)}$ для упрощенной матрицы $\omega_{(nn)}$, таким же путем рассчитываем второе приближение $\omega^{(2)}_{(nn)}$ этой матрицы $\omega_{(nn)}$. С этой целью для полученной матрицы $\omega^{(1)}_{(nn)}=a^{(1)}_{(nn)}$ подсчитываем по всем строкам $j=1, 2, \ldots, n$ суммы $Ц^{(1)}_j$, которые, однако, в отличие **от сумм** $Ц^{(0)}$ определяются с учетом того, что составляющие $\omega^{(1)}_{s.s+1}=a^{(1)}_{s.s+1}$ матрицы $\omega^{(1)}_{(nn)}=a^{(1)}_{(nn)}$ равны $+1$, если соответствующее собственное число λ_s есть кратное λ_β. Поэтому указанные суммы $Ц^{(1)}_j$ нужно подсчитывать так:

$$Ц^{(1)}_j=\sum_{\varkappa=k}^{n}|a^{(1)}_{kj}|^2,\ k\neq\begin{cases} j, \text{ если } a^{(1)}_{j.j+1}=0\\ j\cap j+1, \text{ если } a^{(1)}_{j.j+1}=1.\end{cases} \qquad (23.1)$$

Далее среди полученных сумм $Ц^{(1)}_j$ выбирают m наибольших $Ц^{(1)}_c, Ц^{(1)}_d, \ldots, Ц^{(1)}_\mu, \ldots Ц^{(1)}_k$ и затем образуют из $a^{(1)}_{(nn)}$ частную матрицу $a^{cd\ldots\epsilon}_{(mm)}=a^{(1)}_{(mm)}$, составляющие которой $a^{(1)}_{\mu\nu}$ находятся на пересечении m строк $\mu=c, d, \ldots, k$ и m столбцов $\nu=c, d, k$ матрицы $a^{(1)}_{(nn)}$. Теперь для построенной матрицы $a^{cd..k}_{(mm)}=a^{(1)}_{(mm)}$ находим по способу

Данилевского собственные числа λ_s, некоторые из которых λ_β могут быть кратными, и образуем частную преобразующую матрицу $g^{(1)}_{(mm)}$ из основных $\bar{g}^{(1)}_\beta$ и присоединенных $\bar{g}^{(1)}_{\beta\alpha}$ векторов матрицы $a^{(1)}_{(mm)}$.

Затем находим для матрицы $g^{(1)}_{(mm)}$ ее приведенное представление $\tilde{g}^{(1)}_{(mm)}$, где столбцы $\tilde{g}^{(1)}_{(m)\varkappa}$ удовлетворяют условию $|\tilde{g}^{(1)}_{(m)\varkappa}|=1$ и вычисляем обратную матрицу $(\tilde{g}^{(1)}_{(mm)})^{-1}=\tilde{ж}^{(1)}_{(mm)}$. В заключение переходим от матриц $\tilde{g}^{(1)}_{(mm)}$ и $\tilde{ж}^{(1)}_{(mm)}$ к общим преобразующим матрицам $\tilde{g}^{(1)}_{(nn)}$ и $\tilde{ж}^{(1)}_{(nn)}$ путем присваивания составляющим $e_{\mu\nu}$ единичной матрицы $e_{(nn)}$ соответствующих значений $\tilde{g}^{(1)}$ и $\tilde{ж}^{(1)}_{\mu\nu}$ составляющих в частных матрицах $\tilde{g}^{(1)}_{(mm)}$. и $\tilde{ж}^{(1)}_{(mm)}$.

Построив общие преобразующие матрицы $\tilde{g}^{(1)}_{(nn)}$ и $\tilde{ж}^{(1)}_{(nn)}$, мы можем теперь получить второе приближение $\omega^{(2)}_{(nn)}=a^{(2)}_{(nn)}$ к искомой упрощенной матрице $\omega_{(nn)}$, используя выражение того же вида, что и (20.1)

$$\omega^{(2)}_{(nn)}=(\tilde{g}^{(1)}_{(nn)})^{-1}a^{(1)}_{(nn)}\tilde{g}^{(1)}_{(nn)}=\tilde{ж}^{(1)}_{(nn)}a^{(1)}_{(nn)}\tilde{g}^{(1)}_{(nn)}=a^{(2)}_{(nn)}. \tag{20.2}$$

Таким же образом мы рассчитываем третье $\omega^{(3)}_{(nn)}$, четвертое $\omega^{(4)}_{(nn)}$ и все последующие $\omega^{(s)}_{(nn)}$ приближения к искомой упрощенной матрице $\omega_{(nn)}$, предполагая при этом, что при достаточно большом s

$$\omega^{(s)}_{(nn)}\approx\omega_{(nn)}.$$

Степень приближения последовательных $\omega^{(s)}_{(nn)}$ к искомой $\omega_{(nn)}$ будем оценивать посредством чисел $Ц^{(s)}$, где

$$Ц^{(s)}=\sum_{j=1}^{n}Ц^{(s)}_j, \tag{24.s}$$

причем

$$Ц^{(s)}_j=\sum_{k=1}^{n}|a^{(s)}_{jk}|^2,\ k\neq\begin{cases} j, \text{ если } a^{(s)}_{j.j+1}=0,\\ j\cap j+1, \text{если } a^{(s)}_{j.j+1}. \end{cases} \tag{23.s}$$

Показателем того, что последовательные приближения $\omega^{(s)}_{(nn)}$ стремятся неограниченно к искомой $\omega_{(nn)}$, будет служить существование цепи неравенств

$$Ц^{(0)}>Ц^{(1)}>Ц^{(2)}>\cdots>Ц^{(s)}>Ц^{(s+1)}>\cdots\cdot\tag{25}$$

Мы будем считать, что наш расчет матрицы $\omega_{(nn)}$ может быть закончен на таком приближении $\omega^{(s+1)}_{(nn)}$, для которого

$$Ц^{(s)}-Ц^{(s+1)}\leqslant\Delta, \tag{26}$$

где Δ — заданная точность расчета. Если принять далее, что случайные ошибки $\varepsilon^{(s)}_{\varkappa\lambda}$ в составляющих $\omega^{(s)}_{\varkappa\lambda}$ матриц $\omega^{(s)}_{(nn)}$ следуют закону Гаусса и обозначить среднее значение $C\varepsilon^2_{\varkappa\lambda}$ через ε^2, то мы найдем тогда

$$\Delta^2 \approx C\sum_{\varkappa,\lambda=1}^{n} \varepsilon_{\varkappa\lambda}^2 = \sum_{\varkappa,\lambda=1}^{n} C\,\varepsilon_{\varkappa\lambda}^2 = \sum_{\varkappa,\lambda=1}^{n} 1_{\varkappa\lambda}\varepsilon^2 = n^2\varepsilon^2. \tag{27}$$

Отсюда по вычисленной согласно (27) ошибке Δ можно найти обратно средне-квадратическую ошибку $\pm\varepsilon$ в $\omega_{\varkappa\lambda}^{(s)}$.

$$\varepsilon \approx \pm\frac{\Delta}{n}. \tag{28}$$

После того как мы получили с задуманной степенью точности $\Delta \leqslant \varepsilon$ упрощенную матрицу $\omega_{(nn)}$, определяемую преобразованием (12)

$$\omega_{(nn)} = \tilde{Ж}_{(nn)} a_{(nn)} \tilde{g}_{(nn)}, \tag{12}$$

мы переходим к расчету соответствующей преобразующей матрицы $\tilde{g}_{(nn)}$. Это можно сделать двумя способами:

а) исходя из предельного соотношения

$$\tilde{g}_{(nn)} = \tilde{g}_{(nn)}^{(0)} \tilde{g}_{(nn)}^{(1)} \ldots \tilde{g}_{(nn)}^{(\nu)} = \prod_{s=0}^{\nu} \tilde{g}_{(nn)}^{(s)}, \tag{29}$$

б) решая по известным матрицам $a_{(nn)}$ и $\omega_{(nn)}$ вытекающее из (12) уравнение

$$a_{(nn)} g_{(nn)} = g_{(nn)} \omega_{(nn)}. \tag{12а}$$

относительно матрицы $g_{(nn)}$.

Какой из этих двух путей для определения матрицы $g_{(nn)}$ окажется проще — наперед предугадать трудно.

4. В заключение докажем сходимость предлагаемого способа решения спектральной задачи (1) для произвольной матрицы $a_{(nn)}$, что сводится к установлению цепи неравенств (25), записанных в виде

$$Ц^{(s)} > Ц^{(s+1)}, \quad (s=0,1,2,\ldots), \tag{25}$$

причем входящие сюда показатели качества отдельных приближений $Ц^{(s)}$, $Ц^{(s+1)}$ вычисляются согласно (23.s), (24.s)

$$1)\ Ц_j^{(s)} = \sum_{k=1}^{n} |a_{kj}^{(s)}|^2, \quad k \neq \begin{cases} j, \text{ если } a_{j.j+1}^{(s)}=0, \\ j \cap j+1 \text{ если } a_{j.j+1}^{(s)}=1; \end{cases} \quad 3)\ Ц^{(s)} = \sum_{j=1}^{n} Ц_j^{(s)}. \tag{30}$$

$$2)\ |a_{jk}^{(s)}|^2 = a_{jk}^{(s)}\overline{a}_{jk}^{(s)} = (\alpha_{jk}^{(s)} + i\beta_{jk}^{(s)})(\alpha_{jk}^{(s)} - i\beta_{jk}^{(s)}),\ i=\sqrt{-1}.$$

Чтобы доказать справедливость цепи неравенств (25), прежде всего заметим, что след $tr\,a_{(nn)}$ матрицы $a_{(nn)}$, определяемый выражением

$$tr\,a_{(nn)} = \sum_{\varkappa=1}^{n} a_{\varkappa\varkappa}, \tag{31}$$

не меняется в случае преобразования вида (12)

$$b_{(nn)} = s_{(nn)}^{-1} a_{(nn)} s_{(nn)} = \sigma_{(nn)} a_{(nn)} s_{(nn)}, \tag{32}$$

где $s_{(nn)}$ — произвольная преобразующая матрица. Сказанное вытекает из того, что

$$tr\, b_{(nn)}=\sum_{\varkappa=1}^{n} b_{\varkappa\varkappa}=tr(s_{(nn)}^{-1}\, a_{(nn)} s_{(nn)})=\sum_{\varkappa=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n}\sigma_{\varkappa\mu}a_{\mu\nu}s_{\nu\varkappa}= \tag{33}$$

$$=\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n}a_{\mu\nu}\sum_{\varkappa=1}^{n}\sigma_{\varkappa\mu}\, s_{\nu\varkappa}=\sum_{\mu=1}^{u}\sum_{\nu=1}^{n}a_{\mu\nu}e_{\nu\mu}=\sum_{\nu=1}^{n}a_{\nu\nu}\, e_{\nu\nu}=\sum_{\nu=1}^{n}a_{\nu\nu}=tra_{(nn)}\,,$$

причем $e_{\nu\mu}$ — составляющие единичной матрицы $e_{(nn)}=\sigma_{(nn)}s_{(nn)}=s_{(nn)}$ $_{(nn)}$, для которой

$$e_{\nu\mu}=\sum_{\varkappa=1}^{n}s_{\nu\varkappa}\sigma_{\varkappa\mu}=\begin{cases}+1, \text{ если } \mu=\nu,\\ 0, \text{ если } \mu\neq\nu.\end{cases} \tag{34}$$

Выделим теперь из матрицы s-го приближения $a_{(nn)}^{(s)}=\omega_{(nn)}^{(s)}$ частную матрицу $a_{(mm)}^{(s)}=a_{(mm)}^{\gamma\delta\ldots\nu}$, составляющие которой $a_{\varkappa\mu}^{(s)}$ находятся на пересечении m строк $\varkappa=\gamma, \delta, \ldots, \nu$ и m столбцов $\mu=\gamma, \delta, \ldots, \nu$ общей матрицы $a_{(nn)}^{(s)}=\omega_{(nn)}^{(s)}$. При этом предполагается, что для указанных m строк общей матрицы $a_{(nn)}^{(s)}$ соответствующие показатели $Ц_\gamma Ц_\delta$, ..., $Ц_\nu$ взяты наибольшими среди всех n показателей $Ц_j$ матрицы $a_{(nn)}^{(s)}$.

Далее построим преобразующую матрицу $(s+1)$-го приближения $g_{(nn)}^{(s)}$, взяв единичную матрицу $e_{(nn)}$ и присвоив m^2 ее составляющим $e_{\varkappa\mu}$ те же значения $a_{\varkappa\mu}^{(s)}$, что и в составленной выше частной матрице $a_{(mm)}^{(s)}=a_{(mm)}^{\gamma\delta\ldots\nu}$. После этого пересчитаем полученную преобразующую матрицу в приведенную матрицу $\tilde{g}_{(nn)}^{(s)}$, столбцы которой $\tilde{g}_{(n)\varkappa}^{(s)}$ удовлетворяют условию $|g_{(n)\varkappa}^{(s)}|=1$, и затем найдем соответствующую обратную приведенную матрицу $(\tilde{g}_{(nn)}^{(s)})^{-1}=\tilde{ж}_{(nn)}^{(s)}$. Тогда $(s+1)$-е приближение $a_{(nn)}^{(s+1)}=\omega_{(nn)}^{(s+1)}$ к упрощенной матрице $\omega_{(nn)}$ определим посредством двойного преобразования вида (20)

$$\omega_{(nn)}^{s+1}=(\tilde{g}_{(nn)}^{(s)})^{-1}\omega_{(nn)}^{(s)}\tilde{g}_{(nn)}^{(s)}=\tilde{ж}_{(nn)}^{(s)}a_{(nn)}^{(s)}\tilde{g}_{(nn)}^{(s)}=a_{(nn)}^{(s+1)}\,. \tag{20.s+1}$$

Рассмотрим теперь след $tr[a_{(mm)}^{(s)}\ \bar{a}_{(mm)}^{(s)*}]$ матрицы $[a_{(mm)}^{(s)}\bar{a}_{(mm)}^{(s)*}]$, где $a_{(mm)}^{(s)}=a_{(mm)}^{\gamma\delta\ldots\nu}$ — частная матрица, построенная описанным выше способом из общей матрицы $a_{(nn)}^{(s)}$ после s-го приближения. При этом заметим, что

$$\begin{gathered}1)\ a_{(mm)}^{(s)}=\alpha_{(mm)}^{(s)}+i\,\beta_{(mm)}^{(s)}\,,\quad 2)\ \bar{a}_{(mm)}^{(s)*}=\alpha_{(mm)}^{(s)*}-i\beta_{(mm)}^{(s)*}\,,\\ 3)\ a_{jk}^{(s)}=\alpha_{jk}^{(s)}+i\beta_{jk}^{(s)}\,,\quad 4)\ \bar{a}_{kj}^{(s)*}=\alpha_{kj}^{(s)*}-i\beta_{kj}^{(s)*}\,,\\ 5)\ (\alpha_{jk}^{(s)})^*=\alpha_{kj}^{(s)*}\,,\quad (\beta_{jk}^{(s)})^*=\beta_{kj}^{(s)*}\,;\ 6)\ \operatorname{tr} a_{(mm)}^{(s)}=\sum_{j=1}^{m}a_{jj}.\end{gathered} \tag{35}$$

Тогда мы найдем с учетом сделанных замечаний, что

$$\begin{gathered}\operatorname{tr}\,[a_{(mm)}^{(s)}\bar{a}_{(mm)}^{(s)*}]=\underset{\varkappa=\gamma,\delta,\ldots,\nu}{S}[a_{\gamma\varkappa}^{(s)}\bar{a}_{\varkappa\gamma}^{(s)*}+a_{\delta\varkappa}^{(s)}\,\bar{a}_{\varkappa\delta}^{(s)*}+\ldots+a_{\nu\varkappa}^{(s)}\bar{a}_{\varkappa\nu}^{(s)*}]=\\ =|a_{\gamma\gamma}^{(s)}|^2+|a_{\delta\delta}^{(s)}|^2+\cdots+|a_{\nu\nu}^{(s)}|^2+\underset{\varkappa=\gamma,\delta,\ldots,\nu}{S}[|\underset{\varkappa\neq\gamma}{a_{\gamma\varkappa}^{(s)}}|^2+|\underset{\varkappa\neq\delta}{a_{\delta\varkappa}^{(s)}}|^2+\cdots+|\underset{\varkappa\neq\nu}{a_{\nu\varkappa}^{(s)}}|^2].\end{gathered} \tag{36}$$

Рассмотрим далее след $\operatorname{tr}[a^{(s)}_{(nn)}\bar{a}^{(s)*}_{(nn)}]$ матрицы $[a^{(s)}_{(nn)}\bar{a}^{(s)*}_{(nn)}]$, где $a^{(s)}_{(nn)}=\omega^{(s)}_{(nn)}$ есть s-ое приближение к упрощенной матрице $\omega_{(nn)}$, полученное двойным преобразованием вида (12). Прежде всего мы найдем с учетом (23.5) и (24.5), что

$$\operatorname{tr}[a^{(s)}_{(nn)}\bar{a}^{(s)*}_{(nn)}]=\sum_{j,\varkappa=1}^{n} a^{(s)}_{j\varkappa}\bar{a}^{(s)*}_{\varkappa j}=\sum_{j=1}^{n}|a^{(s)}_{jj}|^2+\sum_{j,\varkappa=1}^{n}|a^{(s)}_{j\varkappa}|^2=$$
$$=\sum_{j=1}^{n}|a^{(s)}_{jj}|^2+Ц^{(s)}+\Delta^{(s)}, \tag{37}$$

где $\Delta^{(s)}=0$, если все собственные значения $\lambda^{(s)}_i$ матрицы $a^{(s)}_{(mm)}$ различные, и $\Delta^{(s)}>0$, если некоторые из значений $\lambda^{(s)}_i$ кратные.

Напишем развернутое выражение для первого члена в равенстве (37), учитывая при этом представление (36) для $\operatorname{tr}[a^{(s)}_{(nn)}\bar{a}^{(s)*}_{(nn)}]$. Тогда мы найдем, что

$$\sum_{j=1}^{n}|a^{(s)}_{jj}|^2=\sum_{\substack{j=1\\ j\neq\gamma,\delta,\ldots,\nu}}^{n}|a^{(s)}_{jj}|^2+[\,|a^{(s)}_{\gamma\gamma}|^2+|a^{(s)}_{\delta\delta}|^2+\cdots+|a^{(s)}_{\nu\nu}|^2\,]= \tag{*}$$
$$=\sum_{\substack{j=1\\ j\neq\gamma,\delta,\ldots,\nu}}^{n}|a^{(s)}_{jj}|^2+\operatorname{tr}[a^{(s)}_{(mm)}\bar{a}^{(s)*}_{(mm)}]-\underset{\varkappa=\gamma,\delta,\ldots,\nu}{S}[\,|a^{(s)}_{\gamma\varkappa}|^2_{\varkappa\neq\gamma}+|a^{(s)}_{\delta\varkappa}|^2_{\varkappa\neq\delta}+\cdots+|a^{(s)}_{\nu\varkappa}|^2_{\varkappa\neq\nu}].$$

Отсюда следует, что

$$\operatorname{tr}[a^{(s)}_{(nn)}\bar{a}^{(s)*}_{(nn)}]=Ц^{(s)}+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq\gamma,\delta,\ldots,\nu}}^{n}|a^{(s)}_{jj}|^2+\operatorname{tr}[a^{(s)}_{(mm)}\bar{a}^{(s)*}_{(mm)}]- \tag{38.5}$$
$$-\underset{\varkappa=\gamma,\delta,\ldots,\nu}{S}[\,|a^{(s)}_{\gamma\varkappa}|^2_{\varkappa\neq\gamma}+|a^{(s)}_{\delta\varkappa}|^2_{\varkappa\neq\delta}+\cdots+|a^{(s)}_{\nu\varkappa}|^2_{\varkappa\neq\nu}]+\Delta^{(s)}.$$

Подобным же образом для матрицы $(s+1)$-го приближения $a^{(s+1)}_{(nn)}=\omega^{(s+1)}_{(nn)}$, определяемой согласно $(20.s+1)$, найдем

$$\operatorname{tr}[a^{(s+1)}_{(nn)}\bar{a}^{(s+1)*}_{(nn)}=Ц^{(s+1)}+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq\gamma,\delta,\ldots,\nu}}^{n}|a^{(s+1)}_{jj}|^2+\operatorname{tr}[a^{(s+1)}_{(mm)}\bar{a}^{(s+1)*}_{(mm)}-$$
$$-\underset{\varkappa=\gamma,\delta,\ldots,\nu}{S}[|a^{(s+1)}_{\gamma\varkappa}|^2_{\varkappa\neq\gamma}+|a^{(s+1)}_{\delta\varkappa}|^2_{\varkappa\neq\delta}+\cdots+|a^{(s+1)}_{\nu\varkappa}|^2_{\varkappa\neq\nu}]+\Delta^{(s+1)}. \tag{38.5+1}$$

Здесь было учтено, что после выполнения s-го приближения мы выделили некоторую частную матрицу $a^{(s)}_{(mm)}$, которая затем была использована для построения приведенной преобразующей матрицы $\tilde{g}^{(s)}_{(nn)}$ входящей в двойное преобразование $(20.s+1)$. Поэтому в частную матрицу $a^{(s+1)}_{(mm)}$ с составляющими $a^{(s+1)}_{\varkappa\lambda}$ входят те же строки $\chi=\gamma,\ \delta,\ \ldots,\ \nu$ и те же столбцы $\lambda=\gamma,\ \delta,\ \ldots,\ \nu$, что и в матрицу $a^{(s)}_{(mm)}=a^{\gamma\delta\ldots\nu}_{(mm)}$. Что касается матрицы $a^{(s+1)}_{(nn)}$, то она, естественно, содержит те же n строк и n столбцов, что и матрица $a^{(s)}_{(nn)}$.

5. Из сопоставления равенств (38.s) и $(38.s+1)$ еще не усматривается сходимость предлагаемого способа, так как

$$\operatorname{tr}[a_{(nn)}^{(s+1)}\bar{a}_{(nn)}^{(s+1)*}=\operatorname{tr}](\widetilde{\text{ж}}_{(nn)}^{(s)}a_{(nn)}^{(s)}\tilde{g}_{(nn)}^{(s)})(\overline{\widetilde{\text{ж}}_{(nn)}^{(s)}a_{(nn)}^{(s)}\tilde{g}_{(nn)}^{(s)}})^{*}=$$
$$=\operatorname{tr}[\widetilde{\text{ж}}_{(nn)}^{(s)}a_{(nn)}^{(s)}\tilde{g}_{(nn)}^{(s)}\bar{\tilde{g}}_{(nn)}^{(s)*}\;\bar{a}_{(nn)}^{(s)*}\overline{\widetilde{\text{ж}}}_{(nn)}^{(s)*}\;]\neq\operatorname{tr}[\widetilde{\text{ж}}_{(nn)}^{(s)}(a_{(nn)}^{(s)}\;\bar{a}_{(nn)}^{(s)*})(\widetilde{\text{ж}}_{(nn)}^{(s)})^{-1}]=$$
$$=\operatorname{tr}[\widetilde{\text{ж}}_{(nn)}^{(s)}(a_{(nn)}^{(s)}\;\bar{a}_{(nn)}^{(s)*})\,\tilde{g}_{(nn)}^{(s)}]=\operatorname{tr}[a_{(nn)}^{(s)}\bar{a}_{(nn)}^{(s)}],$$

причем знак $\neq$ поставлен пока по чисто внешним признакам. Поэтому мы несколько изменим наш способ, чтобы получить более простое доказательство его сходимости.

Разложим заданную матрицу $a_{(nn)}$ произвольного вида на эрмитову $b_{(nn)}$ и косоэрмитову $c_{(nn)}$, взяв

$$1)\; b_{(nn)}=\frac{1}{2}(a_{(nn)}+\bar{a}_{(nn)}^{*}),\; 2)\; c_{(nn)}=\frac{1}{2}(a_{(nn)}-\bar{a}_{(nn)}^{*},$$
$$3)\; a_{(nn)}=\frac{1}{2}(b_{(nn)}+c_{(nn)}). \tag{39}$$

Следовательно,

$$1)\; b_{(nn)}=\bar{b}_{(nn)}^{*},\; 2)\; c_{(nn)}=-\bar{c}_{(nn)}^{*};\; 3)\; \operatorname{tr}c_{(nn)}=-\operatorname{tr}\bar{c}_{(nn)}^{*}=0_{(nn)}; \tag{40}$$
$$4)\; a_{(nn)}\bar{a}_{(nn)}^{*}=\frac{1}{4}[(b_{(nn)}+c_{(nn)})(\bar{b}_{(nn)}^{*}-\bar{c}_{(nn)}^{*})]=\frac{1}{4}(b_{(nn)}\bar{b}_{(nn)}^{*}-c_{(nn)}\bar{c}_{(nn)}^{*});$$
$$5)\; \operatorname{tr}(a_{(nn)}\bar{a}_{(nn)}^{*})=\frac{1}{4}\operatorname{tr}(b_{(nn)}\;\bar{b}_{(nn)}^{*}-c_{(nn)}\bar{c}_{(nn)}^{*})=$$
$$=\frac{1}{4}[\operatorname{tr}(b_{(nn)}\bar{b}_{(nn)}^{*})-\operatorname{tr}(c_{(nn)}\;\bar{c}_{(nn)}^{*})];$$
$$6)\; b_{(nn)}^{(s+1)}=(\tilde{u}_{(nn)}^{(s)})^{-1}b_{(nn)}^{(s)}\tilde{u}_{(nn)}^{(s)}=\tilde{\eta}_{(nn)}^{(s)}b_{(nn)}^{(s)}\;\tilde{u}_{(nn)}^{(s)},$$
$$7)\; c_{(nn)}^{(s+1)}=(w_{(nn)}^{(s)})^{-1}\,c_{(nn)}^{(s)}\tilde{w}_{(nn)}^{(s)}=\tilde{\beta}_{(nn)}^{(s)}\,c_{(nn)}^{(s)}\tilde{w}_{(nn)}^{(s)}.$$

Рассмотрим соотношения (40.6) и (40.7) более подробно.

Обращаясь сначала к двойному преобразованию (40.6) и заметив, что здесь $b_{(nn)}^{(s)}=\bar{b}_{(nn)}^{(s)*}$, получим

$$1)\; b_{(nn)}^{(s+1)}=\tilde{\eta}_{(nn)}^{(s)}b_{(nn)}^{(s)}\,\tilde{u}_{(nn)}^{(s)}=\tilde{\eta}_{(nn)}^{(s)}\bar{b}_{(nn)}^{(s)}\tilde{u}_{(nn)}^{(s)},$$
$$2)\; \bar{b}_{(nn)}^{(s+1)*}=\bar{\tilde{u}}_{(nn)}^{(s)*}\bar{b}_{(nn)}^{(s)*}\overline{\tilde{\eta}}_{(nn)}^{(s)*}=\overline{\tilde{u}}_{(nn)}^{(s)*}\,b_{(nn)}^{(s)}\overline{\tilde{\eta}}_{(nn)}^{(s)*}. \tag{**}$$

Отсюда следует, что если потребовать, чтобы $b_{(nn)}^{(s+1)}=\bar{b}_{(nn)}^{(s+1)*}$, то из (**) найдем

$$1)\; \tilde{\eta}_{(nn)}^{(s)}=(\tilde{u}_{(nn)}^{(s)})^{-1}=\bar{\tilde{u}}_{(nn)}^{(s)*},\; 2)\; \tilde{u}_{(nn)}^{(s)}\overline{\tilde{u}}_{(nn)}^{(s)}=e_{(nn)}, \tag{41}$$

а это значит, что $\tilde{u}_{(nn)}^{(s)}$ — унитарная матрица. Поэтому тогда

$$\operatorname{tr}[b_{(nn)}^{(s+1)}\bar{b}_{(nn)}^{(s+1)*}]=\operatorname{tr}[\tilde{\eta}_{(nn)}^{(s)}b_{(nn)}^{(s)}(\tilde{u}_{(nn)}^{(s)}\overline{\tilde{u}}_{(nn)}^{(s)*})\,\bar{b}_{(nn)}^{(s)*}\bar{\tilde{\eta}}_{(nn)}^{(s)*}]=$$
$$=\operatorname{tr}[\tilde{\eta}_{(nn)}^{(s)}(b_{(nn)}^{(s)}\bar{b}_{(nn)}^{(s)*})\,\tilde{u}_{(nn)}^{(s)}]=\operatorname{tr}[b_{(nn)}^{(s)}\bar{b}_{(nn)}^{(s)*}]. \tag{42}$$

Обращаясь затем к двойному преобразованию (40.7) и замечая, что здесь $c_{(nn)}^{(s)}=-\bar{c}_{(nn)}^{(s)}$, получим

$$1)\ c_{(nn)}^{(s+1)}=\breve{\beta}_{(nn)}^{(s)}c_{(nn)}^{(s)}\tilde{\omega}_{(nn)}^{(s)}=-\beta_{(nn)}^{(s)}\overline{c}_{(nn)}^{(s)*}\widehat{\omega}_{(nn)}^{(s)}, \qquad (***)$$

$$2)\ \bar{c}_{(nn)}^{(s+1)}=\overline{\tilde{\omega}}_{(nn)}^{(s)}\bar{c}_{(nn)}^{(s)*}\overline{\breve{\beta}}_{(nn)}^{(s)}=-\overline{\tilde{\omega}}_{(nn)}^{(s)}c_{(nn)}^{(s)}\overline{\breve{\beta}}_{(nn)}^{(s)*}.$$

Следовательно, если потребовать, чтобы $c_{(nn)}^{(s+1)}=-\bar{c}_{(nn)}^{(s+1)*}$, то из (***) получим

$$1)\ \breve{\beta}_{(nn)}^{(s)}=(\tilde{\omega}_{(nn)}^{(s)})^{-1}=-\overline{\tilde{\omega}}_{(nn)}^{(s)*}, \qquad 2)\ \overline{\tilde{\omega}}_{(nn)}^{(s)*}\tilde{\omega}_{(nn)}^{(s)}=-e_{(nn)}. \tag{43}$$

Отсюда вытекает, что

$$\operatorname{tr}[c_{(nn)}^{(s+1)}\bar{c}_{(nn)}^{(s+1)*}]=\operatorname{tr}[\breve{\beta}_{(nn)}^{(s)}c_{(nn)}^{(s)}(\tilde{\omega}_{(nn)}^{(s)}\overline{\tilde{\omega}}_{(nn)}^{(s)*})\bar{c}_{(nn)}^{(s)*}\overline{\breve{\beta}}_{(nn)}^{(s)*}]=$$
$$=\operatorname{tr}[\overline{\breve{\beta}}_{(nn)}^{(s)}(c_{(nn)}^{(s)}\bar{c}_{(nn)}^{(s)*})\tilde{\omega}_{(nn)}^{(s)}]=\operatorname{tr}[c_{(nn)}^{(s)}\bar{c}_{(nn)}^{(s)*}]. \tag{44}$$

Сопоставляя, наконец, (42) и (44) с (40.5), найдем для матриц $a_{(rr)}^{(s)}$ и $a_{(rr)}^{(s+1)}$, входящих в (38.s) и (38.$s+1$), следующее общее соотношение при $r=m$, n:

$$\operatorname{tr}[a_{(rr)}^{(s+1)}\bar{a}_{(rr)}^{(s+1)*}]=\operatorname{tr}[a_{(rr)}^{(s)}\bar{a}_{(rr)}^{(s)*}],\ (r=m,n). \tag{45}$$

Кроме того, принимая во внимание особое строение (19) матриц $\tilde{g}_{(nn)}^{(s)}$, и $\widetilde{ж}_{(nn)}^{(s)}$ в двойном преобразовании (20.$s+1$), устанавливаем наличие дополнительных соотношений

$$1)\ a_{jj}^{(s)}=a_{jj}^{(s+1)},\ \text{если}\ j\neq\gamma,\delta,\ldots,\nu;\quad 2)\ \sum_{\substack{j=1\\ i=\gamma,\delta,\ldots,\nu}}^{n}|a_{ij}^{(s)}|^2=\sum_{j=1}^{n}|a_{jj}^{(s+1)}|^2. \tag{46}$$

Сопоставляя теперь равенства (38.s) и (38.$s+1$) с учетом соотношений (45), (46), приходим к выводу, что

$$Ц^{(s+1)}=Ц^{(s)}-\underset{\varkappa=\gamma,\delta,\ldots,\nu}{S}[(|a_{\underset{\varkappa\neq\gamma}{\gamma\varkappa}}^{(s)}|^2-|a_{\gamma\varkappa}^{(s+1)}|^2)+(|a_{\underset{\varkappa\neq\delta}{\delta\varkappa}}^{(s)}|^2-|a_{\delta\varkappa}^{(s+1)}|^2)+$$
$$+\cdots+(|a_{\underset{\varkappa\neq\nu}{\nu\varkappa}}^{(s)}|^2-|a_{\nu\varkappa}^{(s+1)}|^2)], \tag{47}$$

так как $\Delta^{(s)}=\Delta^{(s+1)}$. Но преобразующие матрицы $\tilde{g}_{(nn)}^{(s)}$ мы строим таким образом, чтобы преобразованная согласно (20.$s+1$) матрица $a_{(nn)}^{(s+1)}=\omega_{(nn)}^{(s+1)}$ удовлетворяла условиям

$$a_{\varkappa\mu}^{(s+1)}=0,\ \text{если}\ \varkappa,\mu=\gamma,\delta,\ldots,\nu\cap[(\varkappa\neq\mu)\mathrm{U}(\varkappa\neq\mu\cap\mu+1]. \tag{48}$$

Поэтому равенство (47) принимает следующий окончательный вид:

$$Ц^{(s+1)}Ц^{(s)}-\underset{\varkappa=\gamma,\delta,\ldots,\nu}{S}[|a_{\underset{\varkappa\neq\gamma}{\gamma\varkappa}}^{(s)}|^2+|a_{\underset{\varkappa\neq\delta}{\delta\varkappa}}^{(s)}|^2+\cdots+|a_{\underset{\varkappa\neq\nu}{\nu\varkappa}}^{(s)}|^2)], \tag{47.1}$$

откуда вытекает, что действительно

$$Ц^{(s+1)}<Ц^{(s)},\ (s=0,1,2,\ldots). \tag{25}$$

Следовательно, предлагаемый способ решения спектральной задачи для произвольной матрицы $a_{(nn)}$ всегда сходится. Равенство

(48.1) показывает также, что чем больше порядок mm вспомогательной матрицы $a^{(s)}_{(mm)}=a^{7\delta\ldots\nu}_{(mm)}$, тем быстрее последовательность матриц $a^{(s)}_{(nn)}=\omega^{(s)}_{(nn)}$ приближается к упрощенной матрице $\omega_{(nn)}$.

6. Спектральную задачу для произвольной матрицы $a_{(nn)}$ можно решать также иным путем, использованным при доказательстве сходимости предлагаемого способа, а именно: выражая заданную матрицу $a_{(nn)}$ через соответствующие эрмитову $b_{(nn)}$ и косоэрмитову $c_{(nn)}$ матрицы

$$1)\ b_{(nn)}=\frac{1}{2}(a_{(nn)}+\bar{a}^{*}_{(nn)}),\qquad 2)\ c_{(nn)}=\frac{1}{2}(a_{(nn)}-\bar{a}^{*}_{(nn)}),\tag{49}$$

$$3)\ a_{(nn)}=\frac{1}{2}(b_{(nn)}+c_{(nn)}).$$

Затем решаем две частные спектральные задачи.

$$1)\ (b_{(nn)}-\mu e_{(nn)})u_{(n1)}=0_{(n1)},\quad 2)\ (c_{(nn)}-\nu e_{(nn)})w_{(n1)}=0_{(n1)}\tag{50}$$

описанным выше способом, то есть широко опираясь при этом на способ Данилевского. В этом случае существенно упрощается определение обратных преобразующих матриц $\widetilde{\eta}_{(nn)}$ и $\widetilde{\beta}_{(nn)}$, так как согласно (41) и (43)

$$1)\ \widetilde{\eta}^{(s)}_{(nn)}=\overline{\bar{u}}^{(s)*}_{(nn)},\qquad 3)\ \widetilde{\beta}^{(s)}_{(nn)}=-\overline{\bar{w}}^{(s)*}_{(nn)},\tag{51}$$

$$2)\ \tilde{u}^{(s)}_{(nn)}\overline{\bar{u}}^{(s)*}_{(nn)}=e_{(nn)},\qquad 4)\ \tilde{w}^{(s)}_{(nn)}\overline{\bar{w}}^{(s)*}_{(nn)}=-e_{(nn)}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Г. Курош. Курс высшей алгебры. М., Физматгиз, 1962.
2. Д. К. Фаддеев и В. Н. Фаддеева. Вычислительные методы линейной алгебры. М.-Л., Физматгиз, 1963.
3. В. В. Воеводин. Численные методы алгебры. М., «Наука», 1966.

¼ 12 Заказ 10892