

РЕШЕНИЕ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ
ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНОЙ МАТРИЦЫ $a_{(nn)}$
ОБОБЩЕННЫМ СПОСОБОМ ВРАЩЕНИЯ

Б. Ф. КРУТОЙ

(Представлена научным семинаром кафедры инженерной и вычислительной математики)

1. Предположим, что нам задана произвольная равнобокая матрица $a_{(nn)}$, вещественная или комплексная. Тогда для такой матрицы $a_{(nn)}$ может быть поставлена соответствующая спектральная задача:

Найти наборы (спектр) собственных чисел λ и собственных векторов $g_{(n)} = \bar{g}$ матрицы $a_{(nn)}$, удовлетворяющие уравнению

$$a_{(nn)}g_{(n)} = \lambda e_{(nn)}g_{(n)}, \quad (1)$$

или в операторном виде

$$A\bar{g} = \lambda E\bar{g}, \quad (1^*)$$

где A и E — линейные операторы, отвечающие данной $a_{(nn)}$ и единичной $e_{(nn)}$ матрицам в некоторой отсчетной опоре, λ и \bar{g} — собственные числа и векторы оператора A .

Для решения поставленной спектральной задачи представим уравнение (1) в виде

$$(a_{(nn)} - \lambda e_{(nn)})g_{(n)} = 0_{(n)}. \quad (2)$$

Отсюда вытекает прежде всего, что уравнение (2) удовлетворится, если положить $g_{(n)} = 0_{(n)}$. Если же поставить целью найти набор отличных от нуля собственных векторов $g_{(n)}$, то для этого нужно потребовать, чтобы первый множитель $a_{(nn)} - \lambda e_{(nn)}$ обращался в нуль, что равносильно условию

$$|a_{(nn)} - \lambda e_{(nn)}| = 0. \quad (3)$$

для соответствующего определителя $|a_{(nn)} - \lambda e_{(nn)}|$.

После раскрытия определителя (3) получим алгебраическое уравнение n -й степени с неизвестным λ

$$|a_{(nn)} - \lambda e_{(nn)}| = \sum_{\nu=0}^n b_{\nu} \lambda^{\nu} = 0, \quad (3a)$$

обладающее всегда n корнями λ_s , некоторые из которых возможно будут комплексными парами вида $\alpha_x \pm i\beta_x$. Кроме того, среди n корней

λ_s уравнения (3а) могут встречаться также равные между собой. Поэтому число r различных между собой корней λ_β уравнения (3а) может быть и меньше $n: r \leq n$.

Если мы вставим $r \leq n$ различных корней λ_β в матричное уравнение (2), то получим связку из r уравнений вида

$$a_{(nn)}g_{(n)\beta} = \lambda_\beta e_{(nn)}g_{(n)\beta}, \quad (\beta = 1, 2, \dots, r \leq n) \quad (4)$$

относительно $r \leq n$ соответствующих собственных векторов $g_{(n)\beta}$, что можно представить также матричным уравнением

$$a_{(nn)}g_{(nr)} = e_{(nn)}g_{(nr)}\lambda_{(rr)} = g_{(nr)}\lambda_{(rr)} \quad (r \leq n), \quad (4^*)$$

причем в (4) и (4*)

$$1) \ g_{(n)\beta} = \begin{bmatrix} g_{1\beta} \\ g_{2\beta} \\ \vdots \\ g_{r\beta} \\ \vdots \\ g_{n\beta} \end{bmatrix}, \quad 2) \ \lambda_{(rr)} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_\beta & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \lambda_r \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Так как каждое β -ое уравнение связки (4) с неизвестным собственным вектором $g_{(n)\beta}$ является однородным, то одна из составляющих $g_{\nu\beta}$ этого вектора будет произвольной, и мы примем, что

$$g_{(n)\beta} = 1, \quad (\beta = 1, 2, \dots, r \leq n). \quad (6)$$

Если $r = n$, то в уравнении (4*) имеем $g_{(nr)} = g_{(nn)}$, $\lambda_{(rr)} = \lambda_{(nn)}$ и мы найдем тогда, что

$$\lambda_{(nn)} = g_{(nn)}^{-1} a_{(nn)} g_{(nn)} = \mathcal{X}_{(nn)} a_{(nn)} g_{(nn)} = \omega_{(nn)}. \quad (7)$$

Отсюда видно, что если $r = n$, то в отсчетной опоре их n собственных векторов $g_{(n)\beta}$ исходная матрица $a_{(nn)}$ становится диагональной $\lambda_{(nn)} = \omega_{(nn)}$ с простейшим строением (5).

Если же $r < n$, то мы поставим задачей к r собственным векторам $g_{(n)\beta}$ подыскать еще $n - r$ независимых присоединенных векторов $f_{(n)j}$, $j = r + 1, r + 2, \dots, n$ таких, чтобы в отсчетной опоре из r собственных векторов $g_{(n)\beta}$ и $n - r$ присоединенных векторов $f_{(n)j}$ преобразованная матрица $\omega_{(nn)}$, где

$$\omega_{(nn)} = [g_{(nr)} f_{(n,n-r)}]^{-1} a_{(nn)} [g_{(nr)} f_{(n,n-r)}], \quad (8)$$

имела наиболее простой вид.

Следуя Жордану [1], эти $n - r$ присоединенных векторов $f_{(n)j}$ будем определять по частям, приписав к каждому собственному вектору $g_{(n)\beta}$, порожденному собственным числом λ_β кратности d_β , еще $d_\beta - 1$ присоединенных векторов $f_{(n)j} = g_{(n)\beta}^\alpha$, $\alpha = 2, 3, \dots, d_\beta$, и положив $g_{(n)\beta} = g_{(n)\beta}^1$.

Чтобы все n векторов $g_{(n)\beta} = g_{(n)\beta}^1, g_{(n)\beta}^\alpha$ были взаимонезависимы и чтобы преобразованная согласно (8) матрица $\omega_{(nn)}$ имела наиболее простое строение, Жордан предложил определять каждую β -ую совокупность из d_β векторов $g_{(n)\beta} = g_{(n)\beta}^1, g_{(n)\beta}^\alpha$ из следующего свода d_β векторных уравнений

$$\begin{cases} A\bar{g}_{\beta 1} = \lambda_{\beta}\bar{g}_{\beta 1} + 0\bar{g}_{\beta 2} + 0\bar{g}_{\beta 3} + \dots + 0\bar{g}_{\beta \cdot \partial_{\beta}-1} + 0\bar{g}_{\beta \cdot \partial_{\beta}} \\ A\bar{g}_{\beta \alpha} = 1\bar{g}_{\beta 1} + \lambda_{\beta}\bar{g}_{\beta 2} + 0\bar{g}_{\beta 3} + \dots + 0\bar{g}_{\beta \cdot \partial_{\beta}-1} + 0\bar{g}_{\beta \cdot \partial_{\beta}} \\ A\bar{g}_{\beta 3} = 0\bar{g}_{\beta 1} + 1\bar{g}_{\beta 2} + \lambda_{\beta}\bar{g}_{\beta 3} + \dots + 0\bar{g}_{\beta \cdot \partial_{\beta}-1} + 0\bar{g}_{\beta \cdot \partial_{\beta}} \\ \dots \\ A\bar{g}_{\beta \cdot \partial_{\beta}} = 0\bar{g}_{\beta 1} + 0\bar{g}_{\beta 2} + 0\bar{g}_{\beta 3} + \dots + 1\bar{g}_{\beta \cdot \partial_{\beta}-1} + \lambda_{\beta}\bar{g}_{\beta \cdot \partial_{\beta}} \end{cases} \quad (9^{**})$$

Здесь A — линейный оператор, которому в исходной отсчетной опоре соответствует матрица $a_{(nn)}$, а в опоре из r собственных векторов $\bar{g}_{(n)\beta} = \bar{g}_{\beta} = \bar{g}_{\beta 1}$ и $n-r$ присоединенных векторов $f_{(n)j} = g_{(n)\beta}^{\alpha} = \bar{g}_{\beta \alpha}$ соответствует матрица $\omega_{(nn)}$, определяемая согласно (8).

Если далее свод (9**) из ∂_{β} векторных уравнений запишем в более сжатом виде

$$\begin{aligned} A[\bar{g}_{\beta 2} \dots \bar{g}_{\beta \alpha} \dots \bar{g}_{\beta \cdot \partial_{\beta}}]^* &= \begin{bmatrix} \lambda_{\beta} & 0 & 0 \dots 0 & 0 \dots 0 & 0 \\ 1_{21} & \lambda_{\beta} & 0 \dots 0 & 0 \dots 0 & 0 \\ 0 & 1_{32} & \lambda_{\beta} \dots 0 & 0 \dots 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots 1_{\alpha, \alpha-1} & \lambda_{\beta} \dots 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots 0 & 0 \dots 1 & \lambda_{\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{g}_{1\beta} \\ \bar{g}_{2\beta} \\ \dots \\ \bar{g}_{\alpha\beta} \\ \dots \\ \bar{g}_{\beta \cdot \partial_{\beta}} \end{bmatrix} = \\ &= [\bar{g}_{\beta 1} \bar{g}_{\beta 2} \dots \bar{g}_{\beta \alpha} \dots \bar{g}_{\beta \cdot \partial_{\beta}}]^* \begin{bmatrix} \lambda_{\beta} & 1_{12}^* & 0 \dots 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & \lambda_{\beta} & 1_{23}^* \dots 0 & 0 \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots \lambda_{\beta} & 1_{\alpha, \alpha-1}^* \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots 0 & 0 \dots \lambda_{\beta} \end{bmatrix}, \quad (9^*) \end{aligned}$$

то векторно-матричному уравнению (9*) будет соответствовать следующее матричное уравнение

$$a_{(nn)}g_{(n \cdot \partial_{\beta})} = g_{(n \cdot \partial_{\beta})}\omega_{(\partial_{\beta} \cdot \partial_{\beta})}, \quad (\beta = 1, 2, \dots, r \leq n), \quad (9)$$

где обозначено

$$\begin{aligned} 1) \quad g_{(n \cdot \partial_{\beta})} &= [g_{(n)1}^{\beta} g_{(n)2}^{\beta} \dots g_{(n)\alpha}^{\beta} \dots g_{(n)\partial_{\beta}}^{\beta}], \\ 2) \quad \omega_{(\partial_{\beta} \cdot \partial_{\beta})} &= \begin{bmatrix} \lambda_{\beta} & 1 & 0 \dots 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & \lambda_{\beta} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots \lambda_{\beta} & 1 \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots 0 & 0 \dots \lambda_{\beta} \end{bmatrix}. \quad (10) \end{aligned}$$

Клетка $\omega_{(\partial_{\beta} \cdot \partial_{\beta})}$ простого строения (10) называется ящиком Жордана.

Из проведенного исследования теперь вытекает, что если в преобразующей матрице $[g_{(nr)}f_{(n \cdot n-r)}]$ из равенства (8) мы переставим столбцы в соответствии с предложением Жордана (9**), то получим преобразующую матрицу $g_{(nn)}$, которая будет иметь следующее строение

$$g_{(nn)} = [g_{(n \cdot \partial_1)} g_{(n \cdot \partial_2)} \dots g_{(n \cdot \partial_r)} \dots g_{(n \cdot \partial_n)}], \quad (r \leq n), \quad (11)$$

Тогда вместо выражения (8) для расчета матрицы $\omega_{(nn)}$ найдем равенство того же вида

$$\omega_{(nn)} = \mathbf{g}_{(nn)}^{-1} \mathbf{a}_{(nn)} \mathbf{g}_{(nn)} = \mathbf{Ж}_{(nn)} \mathbf{a}_{(nn)} \mathbf{g}_{(nn)}. \quad (12)$$

Выясним строение вычисленной согласно (12) матрицы $\omega_{(nn)}$. С этой целью сложим все r векторных уравнений (9). Тогда мы получим

$$\sum_{\beta=1}^r \mathbf{a}_{(n\beta)} \mathbf{g}_{(n \cdot \partial_\beta)} = \sum_{\beta=1}^r \mathbf{g}_{(n \cdot \partial_\beta)} \omega_{(\partial_\beta \cdot \partial_\beta)} = \sum_{\beta=0}^n \mathbf{g}_{(n \cdot \partial_\beta)} \omega_{(\partial_\beta \cdot \partial_x)}, \quad (r \leq n),$$

где

$$\omega_{(\partial_\beta \cdot \partial_\beta)} = \begin{cases} \omega_{(\partial_\beta \cdot \partial_\beta)}, & \text{если } x = \beta \\ 0_{(\partial_\beta \cdot \partial_x)}, & \text{если } x \neq \beta. \end{cases} \quad (13)$$

Отсюда вытекает, что матрица $\omega_{(nn)} = [\omega_{(\partial_\beta \cdot \partial_x)}]_1^r$, определяемая согласно (12), имеет следующее строение:

$$\omega_{(nn)} = \begin{bmatrix} \omega_{(\partial_1 \cdot \partial_1)} & 0_{(\partial_1 \cdot \partial_2)} & \cdots & 0_{(\partial_1 \cdot \partial_\beta)} & \cdots & 0_{(\partial_1 \cdot \partial_r)} \\ 0_{(\partial_2 \cdot \partial_1)} & \omega_{(\partial_2 \cdot \partial_2)} & \cdots & 0_{(\partial_2 \cdot \partial_\beta)} & \cdots & 0_{(\partial_2 \cdot \partial_r)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0_{(\partial_\beta \cdot \partial_1)} & 0_{(\partial_\beta \cdot \partial_2)} & \cdots & \omega_{(\partial_\beta \cdot \partial_\beta)} & \cdots & 0_{(\partial_\beta \cdot \partial_r)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0_{(\partial_r \cdot \partial_1)} & 0_{(\partial_r \cdot \partial_2)} & \cdots & 0_{(\partial_r \cdot \partial_\beta)} & \cdots & \omega_{(\partial_r \cdot \partial_r)} \end{bmatrix}, \quad (r \leq n) \quad (14)$$

с ящиками Жордана $\omega_{(\partial_\beta \cdot \partial_\beta)}$ простейшего вида (10).

2. Мы дали решение спектральной задачи (1), сведя его к последовательности уравнений (3а), (4*), (9)

$$1) |a_{(nn)} - \lambda e_{(nn)}| = \sum_{\nu=0}^n b_\nu \lambda^\nu = 0; \quad 2) a_{(n\beta)} \mathbf{g}_{(nr)} = \mathbf{g}_{(n\beta)} \lambda_{(rr)}, \quad (r \leq n) \quad (15)$$

$$3) a_{(n\beta)} \mathbf{g}_{(n \cdot \partial_\beta)} = \mathbf{g}_{(n \cdot \partial_\beta)} \omega_{(\partial_\beta \cdot \partial_\beta)}, \quad (\beta = 1, 2, \dots, r \leq n)$$

с завершающим представлением (12)

$$\omega_{(nn)} = \mathbf{g}_{(nn)}^{-1} \mathbf{a}_{(nn)} \mathbf{g}_{(nn)} = \mathbf{Ж}_{(nn)} \mathbf{a}_{(nn)} \mathbf{g}_{(nn)} \quad (12)$$

для искомой матрицы простейшего строения $\omega_{(nn)}$.

Однако такой путь решения спектральной задачи (1) целесообразен только при $n \leq 4$. Если же $4 < n \leq 49$, то в случае решения этой задачи на ЦВМ вроде БЭСМ-4 нужно применить способ Данилевского [2], для которого имеются на этих машинах готовые программы на языке «Алгол-60».

Наконец, при $n > 15-20$ целесообразно, а при $n > 49$ — совершенно необходимо для решения спектральной задачи (1) применять те или иные способы последовательных приближений. Эти способы дают преобразующую матрицу $\mathbf{g}_{(nn)}$ и матрицу простейшего строения $\omega_{(nn)}$ минуя совершенно неосуществимую при большом n предварительную ступень разворачивания определителя $|a_{(nn)} - \lambda e_{(nn)}|$ в соответствующий

многочлен $\sum_{\nu=0}^n b_\nu \lambda^\nu$.

Один способ такого рода предложен В. В. Воеводиным в [3], но существенным недостатком его способа является необходимость двух-ступенчатого преобразования исходной матрицы $a_{(nn)}$: сначала добиваются уменьшения размеров $|a_{rs}|$ всех составляющих a_{rs} матрицы $a_{(nn)}$, выполняют ее «обтесывание», затем применяют способ вращений для приведения «обтесанной» матрицы $\tilde{a}_{(nn)}$ к упрощенному виду $\omega_{(nn)}$. Кроме того, у Воеводина слабо обоснована необходимость предварительного «обтесывания» исходной матрицы $a_{(nn)}$ и слишком сложен алгоритм перехода от $a_{(nn)}$ к $\tilde{a}_{(nn)}$.

В действительности мысль Воеводина сначала «обтесать» исходную матрицу $a_{(nn)}$, а затем уже применять способ вращения вызвана слабой сходимостью взятой им той простейшей разновидности способа вращений, которая была предложена Якоби еще в прошлом столетии для частного случая симметричной или эрмитовой матрицы $a_{(nn)}$ [2].

2. Если бы Воеводин сумел обобщить надлежащим образом способ Якоби на решение спектральной задачи в случае произвольной матрицы $a_{(nn)}$, то не понадобился бы и предварительный переход от исходной матрицы $a_{(nn)}$ к «обтесанной» матрице $\tilde{a}_{(nn)}$.

Поэтому сейчас мы займемся разысканием такого обобщения для первоначального способа Якоби, которое давало бы решение спектральной задачи для любой матрицы $a_{(nn)}$ и обладало достаточной и управляемой нами скоростью сходимости. Сущность предлагаемого обобщенного способа Якоби заключается в следующем.

3. Прежде всего по всем строкам $j=1, 2, \dots, n$ исходной матрицы $a_{(nn)}$ образуем суммы Π_j^0 , где

$$1) \Pi_j^{(0)} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n |a_{jk}|^2, \quad 2) |a_{j\sigma}|^2 = a_{jk} \bar{a}_{jk} = (\alpha_{jk} \pm i \beta_{jk})^2 = \alpha_{jk}^2 + \beta_{jk}^2, \quad (16)$$

и среди этих сумм $\Pi_j^{(0)}$ выделим $m < n$ наибольших $\Pi_s^{(0)}, \Pi_t^{(0)}, \dots, \Pi_w^{(0)}$. Затем в исходной матрице $a_{(nn)}$ отберем m^2 составляющих $a_{\mu\nu}$, находящихся на пересечении выделенных m строк $\mu=s, t, \dots, w$ и соответствующих m столбцов $\nu=s, t, \dots, w$, и расположим указанные m^2 чисел $a_{\mu\nu}$ в виде вспомогательной матрицы $a_{(mm)}^{st\dots w} = a_{(mm)}^{(0)}$ с тем же взаимным расположением строк и столбцов, что и в исходной матрице $a_{(nn)}$. Таким образом,

$$a_{(mm)}^{st\dots w} = a_{(mm)}^{(0)} = \begin{bmatrix} a_{ss} & a_{st} & \dots & a_{sv} & \dots & a_{sw} \\ a_{ts} & a_{tt} & \dots & a_{tv} & \dots & a_{tw} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{\mu s} & a_{\mu t} & \dots & a_{\mu v} & \dots & a_{\mu w} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{ws} & a_{wt} & \dots & a_{wv} & \dots & a_{ww} \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Теперь для указанной вспомогательной матрицы $a_{(mm)}^{st\dots w} = a_{(mm)}^{(0)}$ нужно рассчитать способом Данилевского набор различных собственных чисел λ_β кратности δ_β и отвечающую им матрицу $g_{(mm)}^{(0)}$ основных $g_{(m1)}^\beta$ и присоединенных $g_{(m1)}^{\beta\alpha}$ векторов. Далее полученную матрицу $g_{(mm)}^{(0)}$ пересчитываем в приведенную $\tilde{g}_{(mm)}^{(0)}$, столбцы которой $\tilde{g}_{(m)\alpha}^x$ удовлетворяют условию $|g_{(m)\alpha}^x| = 1$. Кроме того, для приве-

$$\omega_{(nn)}^{(1)} = (\tilde{g}_{(nn)}^{(0)})^{-1} a_{(nn)} \tilde{g}_{(nn)}^{(0)} = \tilde{ж}_{(nn)}^{(0)} \omega^{(0)} \tilde{g}_{(nn)}^{(0)} = a_{(nn)}^{(1)}, \quad (20.1)$$

где мы обозначили $a_{(nn)} = \omega_{(nn)}^{(0)} = a_{(nn)}^{(0)}$.

Выясним строение найденной матрицы $\omega_{(nn)}^{(1)} = a_{(nn)}^{(1)}$. С этой целью заметим, что если бы вместо преобразования (20) мы взяли преобразование

$$\omega_{(mm)}^{(1)} = \tilde{ж}_{(mm)}^{(0)} a_{(mm)}^{r_{s...w}} \tilde{g}_{(mm)}^{(0)} = \tilde{ж}_{(mm)}^{(0)} a_{(mm)}^{(0)} \tilde{g}_{(mm)}^{(0)}, \quad (21.1)$$

то получили бы матрицу $\omega_{(mm)}^{(1)}$ чисто диагонального вида (5.2), когда все m собственных чисел λ_s — различные; или же получили бы матрицу $\omega_{(mm)}^{(1)}$, несколько осложненную ящиками Жордана (10.2), когда среди собственных чисел λ_s встречаются кратные λ_β . Общее же преобразование (20) отличается от частного преобразования (21) в двух отношениях:

а) матрица $a_{(mm)}^{r_{s...w}}$ заменена матрицей $a_{(nn)}$;

б) вместо матриц $\tilde{g}_{(mm)}^{(0)}$, $\tilde{ж}_{(mm)}^{(0)}$ взяты матрицы $\tilde{g}_{(nn)}^{(0)}$, $\tilde{ж}_{(nn)}^{(0)}$, которые получаются из единичной матрицы $e_{(nn)}$, если ее составляющим $e_{\mu\nu}$ присвоить соответствующие значения $\tilde{g}_{\mu\nu}$, $\tilde{ж}_{\mu\nu}$ составляющих в матрицах $\tilde{g}_{(mm)}^{(0)}$, $\tilde{ж}_{(mm)}^{(0)}$.

Поэтому в общей матрице $\omega_{(nn)}^{(1)}$ на соответственных местах $\mu\nu$ будут стоять те же значения $\omega_{\mu\nu}^{(1)} = \lambda_\beta$, 1, 0, что и в частной матрице $\omega_{(mm)}^{(1)}$. Во всех же других местах $\tau\sigma$ матрицы $\omega_{(nn)}^{(1)}$ будут находиться какие-то другие числа $\omega_{\tau\sigma}^{(1)}$, вычисляемые согласно (20.1).

$$\omega_{\tau\sigma}^{(1)} = \sum_{x=1}^n \sum_{\rho=1}^n \tilde{ж}_{\tau x}^{(1)} a_{x\rho} \tilde{g}_{\rho\sigma}^{(1)}. \quad (22)$$

Таким образом, можно сказать, что общая матрица $\omega_{(nn)}^{(1)}$ воспроизводит на соответственных местах $\mu\nu$ частную матрицу $\omega_{(mm)}^{(1)}$.

Выяснив строение первого приближения $\omega_{(nn)}^{(1)} = a_{(nn)}^{(1)}$ для упрощенной матрицы $\omega_{(nn)}$, таким же путем рассчитываем второе приближение $\omega_{(nn)}^{(2)}$ этой матрицы $\omega_{(nn)}$. С этой целью для полученной матрицы $\omega_{(nn)}^{(1)} = a_{(nn)}^{(1)}$ подсчитываем по всем строкам $j=1, 2, \dots, n$ суммы $\Pi_j^{(1)}$, которые, однако, в отличие от сумм $\Pi^{(0)}$ определяются с учетом того, что составляющие $\omega_{s,s+1}^{(1)} = a_{s,s+1}^{(1)}$ матрицы $\omega_{(nn)}^{(1)} = a_{(nn)}^{(1)}$ равны +1, если соответствующее собственное число λ_s есть кратное λ_β . Поэтому указанные суммы $\Pi_j^{(1)}$ нужно подсчитывать так:

$$\Pi_j^{(1)} = \sum_{k=j}^n |a_{kj}^{(1)}|^2, \quad k \neq \begin{cases} j, & \text{если } a_{j,j+1}^{(1)} = 0 \\ j \cap j+1, & \text{если } a_{j,j+1}^{(1)} = 1. \end{cases} \quad (23.1)$$

Далее среди полученных сумм $\Pi_j^{(1)}$ выбирают m наибольших $\Pi_c^{(1)}$, $\Pi_d^{(1)}$, ..., $\Pi_\mu^{(1)}$, ..., $\Pi_k^{(1)}$ и затем образуют из $a_{(nn)}^{(1)}$ частную матрицу $a_{(mm)}^{cd...k} = a_{(mm)}^{(1)}$, составляющие которой $a_{\mu\nu}^{(1)}$ находятся на пересечении m строк $\mu=c, d, \dots, k$ и m столбцов $\nu=c, d, k$ матрицы $a_{(nn)}^{(1)}$. Теперь для построенной матрицы $a_{(mm)}^{cd...k} = a_{(mm)}^{(1)}$ находим по способу

Данилевского собственные числа λ_s , некоторые из которых λ_β могут быть кратными, и образуем частную преобразующую матрицу $g_{(mm)}^{(1)}$ из основных $\tilde{g}_{\beta}^{(1)}$ и присоединенных $\tilde{g}_{\beta\alpha}^{(1)}$ векторов матрицы $a_{(mm)}^{(1)}$.

Затем находим для матрицы $g_{(mm)}^{(1)}$ ее приведенное представление $\tilde{g}_{(mm)}^{(1)}$, где столбцы $\tilde{g}_{(m)\alpha}^{(1)}$ удовлетворяют условию $|\tilde{g}_{(m)\alpha}^{(1)}| = 1$ и вычисляем обратную матрицу $(\tilde{g}_{(mm)}^{(1)})^{-1} = \tilde{ж}_{(mm)}^{(1)}$. В заключение переходим от матриц $\tilde{g}_{(mm)}^{(1)}$ и $\tilde{ж}_{(mm)}^{(1)}$ к общим преобразующим матрицам $\tilde{g}_{(nn)}^{(1)}$ и $\tilde{ж}_{(nn)}^{(1)}$ путем присваивания составляющим $e_{\mu\nu}$ единичной матрицы $e_{(nn)}$ соответствующих значений $\tilde{g}_{\mu\nu}^{(1)}$ и $\tilde{ж}_{\mu\nu}^{(1)}$ составляющих в частных матрицах $\tilde{g}_{(mm)}^{(1)}$ и $\tilde{ж}_{(mm)}^{(1)}$.

Построив общие преобразующие матрицы $\tilde{g}_{(nn)}^{(1)}$ и $\tilde{ж}_{(nn)}^{(1)}$, мы можем теперь получить второе приближение $\omega_{(nn)}^{(2)} = a_{(nn)}^{(2)}$ к искомой упрощенной матрице $\omega_{(nn)}$, используя выражение того же вида, что и (20.1)

$$\omega_{(nn)}^{(2)} = (\tilde{g}_{(nn)}^{(1)})^{-1} a_{(nn)}^{(1)} \tilde{ж}_{(nn)}^{(1)} = \tilde{ж}_{(nn)}^{(1)} a_{(nn)}^{(1)} \tilde{g}_{(nn)}^{(1)} = a_{(nn)}^{(2)}. \quad (20.2)$$

Таким же образом мы рассчитываем третье $\omega_{(nn)}^{(3)}$, четвертое $\omega_{(nn)}^{(4)}$ и все последующие $\omega_{(nn)}^{(s)}$ приближения к искомой упрощенной матрице $\omega_{(nn)}$, предполагая при этом, что при достаточно большом s

$$\omega_{(nn)}^{(s)} \approx \omega_{(nn)}.$$

Степень приближения последовательных $\omega_{(nn)}^{(s)}$ к искомой $\omega_{(nn)}$ будем оценивать посредством чисел $\Pi^{(s)}$, где

$$\Pi^{(s)} = \sum_{j=1}^n \Pi_j^{(s)}, \quad (24.s)$$

причем

$$\Pi_j^{(s)} = \sum_{k=1}^n |a_{jk}^{(s)}|^2, \quad k \neq \begin{cases} j, & \text{если } a_{j,j+1}^{(s)} = 0, \\ j \cap j+1, & \text{если } a_{j,j+1}^{(s)} \neq 0. \end{cases} \quad (23.s)$$

Показателем того, что последовательные приближения $\omega_{(nn)}^{(s)}$ стремятся неограниченно к искомой $\omega_{(nn)}$, будет служить существование цепи неравенств

$$\Pi^{(0)} > \Pi^{(1)} > \Pi^{(2)} > \dots > \Pi^{(s)} > \Pi^{(s+1)} > \dots \quad (25)$$

Мы будем считать, что наш расчет матрицы $\omega_{(nn)}$ может быть закончен на таком приближении $\omega_{(nn)}^{(s+1)}$, для которого

$$\Pi^{(s)} - \Pi^{(s+1)} \leq \Delta, \quad (26)$$

где Δ — заданная точность расчета. Если принять далее, что случайные ошибки $\epsilon_{\lambda\lambda}^{(s)}$ в составляющих $\omega_{\lambda\lambda}^{(s)}$ матриц $\omega_{(nn)}^{(s)}$ следуют закону Гаусса и обозначить среднее значение $S\epsilon_{\lambda\lambda}^2$ через ϵ^2 , то мы найдем тогда

$$\Delta^2 \approx C \sum_{x,\lambda=1}^n \varepsilon_{x\lambda}^2 = \sum_{x,\lambda=1}^n C \varepsilon_{x\lambda}^2 = \sum_{x,\lambda=1}^n 1_{x\lambda} \varepsilon^2 = n^2 \varepsilon^2. \quad (27)$$

Отсюда по вычисленной согласно (27) ошибке Δ можно найти обратно спелне-квадратическую ошибку $\pm \varepsilon$ в $\omega_{x\lambda}^{(s)}$.

$$\varepsilon \approx \pm \frac{\Delta}{n}. \quad (28)$$

После того как мы получили с задуманной степенью точности $\Delta \leq \varepsilon$ упрощенную матрицу $\omega_{(nn)}$, определяемую преобразованием (12)

$$\omega_{(nn)} = \tilde{K}_{(nn)} \tilde{A}_{(nn)} \tilde{G}_{(nn)}, \quad (12)$$

мы переходим к расчету соответствующей преобразующей матрицы $\tilde{G}_{(nn)}$. Это можно сделать двумя способами:

а) исходя из предельного соотношения

$$\tilde{G}_{(nn)} = \tilde{G}_{(nn)}^{(0)} \tilde{G}_{(nn)}^{(1)} \dots \tilde{G}_{(nn)}^{(y)} = \prod_{s=0}^y \tilde{G}_{(nn)}^{(s)}, \quad (29)$$

б) решая по известным матрицам $\tilde{A}_{(nn)}$ и $\omega_{(nn)}$ вытекающее из (12) уравнение

$$\tilde{A}_{(nn)} \tilde{G}_{(nn)} = \omega_{(nn)}. \quad (12a)$$

относительно матрицы $\tilde{G}_{(nn)}$.

Какой из этих двух путей для определения матрицы $\tilde{G}_{(nn)}$ окажется проще — наперед предугадать трудно.

4. В заключение докажем сходимость предлагаемого способа решения спектральной задачи (1) для произвольной матрицы $\tilde{A}_{(nn)}$, что сводится к установлению цепи неравенств (25), записанных в виде

$$\Pi^{(s)} > \Pi^{(s+1)}, \quad (s=0,1,2,\dots), \quad (25)$$

причем входящие сюда показатели качества отдельных приближений $\Pi^{(s)}$, $\Pi^{(s+1)}$ вычисляются согласно (23.s), (24.s)

$$1) \Pi_j^{(s)} = \sum_{k=1}^n |a_{kj}^{(s)}|^2, \quad k \neq \begin{cases} j, & \text{если } a_{j,j+1}^{(s)} = 0, \\ j \cap j+1 & \text{если } a_{j,j+1}^{(s)} = 1; \end{cases} \quad 3) \Pi^{(s)} = \sum_{j=1}^n \Pi_j^{(s)}. \quad (30)$$

$$2) |a_{jk}^{(s)}|^2 = a_{jk}^{(s)} \bar{a}_{jk}^{(s)} = (\alpha_{jk}^{(s)} + i\beta_{jk}^{(s)}) (\alpha_{jk}^{(s)} - i\beta_{jk}^{(s)}), \quad i = \sqrt{-1}.$$

Чтобы доказать справедливость цепи неравенств (25), прежде всего заметим, что след $tr \tilde{A}_{(nn)}$ матрицы $\tilde{A}_{(nn)}$, определяемый выражением

$$tr \tilde{A}_{(nn)} = \sum_{x=1}^n a_{xx}, \quad (31)$$

не меняется в случае преобразования вида (12)

$$\tilde{b}_{(nn)} = S_{(nn)}^{-1} \tilde{A}_{(nn)} S_{(nn)} = \sigma_{(nn)} \tilde{A}_{(nn)} S_{(nn)}, \quad (32)$$

где $s_{(nn)}$ — произвольная преобразующая матрица. Сказанное вытекает из того, что

$$\begin{aligned} \text{tr } b_{(nn)} &= \sum_{x=1}^n b_{xx} = \text{tr}(s_{(nn)}^{-1} a_{(nn)} s_{(nn)}) = \sum_{x=1}^n \sum_{\mu=1}^n \sum_{\nu=1}^n \sigma_{x\mu} a_{\mu\nu} s_{\nu x} = \\ &= \sum_{\mu=1}^n \sum_{\nu=1}^n a_{\mu\nu} \sum_{x=1}^n \sigma_{x\mu} s_{\nu x} = \sum_{\mu=1}^n \sum_{\nu=1}^n a_{\mu\nu} e_{\nu\mu} = \sum_{\nu=1}^n a_{\nu\nu} e_{\nu\nu} = \sum_{\nu=1}^n a_{\nu\nu} = \text{tra}_{(nn)}, \end{aligned} \quad (33)$$

причем $e_{\nu\mu}$ — составляющие единичной матрицы $e_{(nn)} = \sigma_{(nn)} s_{(nn)} = s_{(nn)}(nn)$, для которой

$$e_{\nu\mu} = \sum_{x=1}^n s_{\nu x} \sigma_{x\mu} = \begin{cases} +1, & \text{если } \mu = \nu, \\ 0, & \text{если } \mu \neq \nu. \end{cases} \quad (34)$$

Выделим теперь из матрицы s -го приближения $a_{(nn)}^{(s)} = \omega_{(nn)}^{(s)}$ частную матрицу $a_{(mm)}^{(s)} = a_{(mm)}^{\gamma\delta\dots\nu}$, составляющие которой $a_{x\mu}^{(s)}$ находятся на пересечении m строк $x = \gamma, \delta, \dots, \nu$ и m столбцов $\mu = \gamma, \delta, \dots, \nu$ общей матрицы $a_{(nn)}^{(s)} = \omega_{(nn)}^{(s)}$. При этом предполагается, что для указанных m строк общей матрицы $a_{(nn)}^{(s)}$ соответствующие показатели $\Pi_\gamma, \Pi_\delta, \dots, \Pi_\nu$ взяты наибольшими среди всех n показателей Π_j матрицы $a_{(nn)}^{(s)}$.

Далее построим преобразующую матрицу $(s+1)$ -го приближения $g_{(nn)}^{(s)}$, взяв единичную матрицу $e_{(nn)}$ и присвоив m^2 ее составляющим $e_{x\mu}$ те же значения $a_{x\mu}^{(s)}$, что и в составленной выше частной матрице $a_{(mm)}^{(s)} = a_{(mm)}^{\gamma\delta\dots\nu}$. После этого пересчитаем полученную преобразующую матрицу в приведенную матрицу $\tilde{g}_{(nn)}^{(s)}$, столбцы которой $\tilde{g}_{(n)x}^{(s)}$ удовлетворяют условию $|\tilde{g}_{(n)x}^{(s)}| = 1$, и затем найдем соответствующую обратную приведенную матрицу $(\tilde{g}_{(nn)}^{(s)})^{-1} = \tilde{ж}_{(nn)}^{(s)}$. Тогда $(s+1)$ -е приближение $a_{(nn)}^{(s+1)} = \omega_{(nn)}^{(s+1)}$ к упрощенной матрице $\omega_{(nn)}$ определим посредством двойного преобразования вида (20)

$$\omega_{(nn)}^{s+1} = (\tilde{g}_{(nn)}^{(s)})^{-1} \omega_{(nn)}^{(s)} \tilde{g}_{(nn)}^{(s)} = \tilde{ж}_{(nn)}^{(s)} a_{(nn)}^{(s)} \tilde{g}_{(nn)}^{(s)} = a_{(nn)}^{(s+1)}. \quad (20.s+1)$$

Рассмотрим теперь след $\text{tr}[a_{(mm)}^{(s)} \bar{a}_{(mm)}^{(s)*}]$ матрицы $[a_{(mm)}^{(s)} \bar{a}_{(mm)}^{(s)*}]$, где $a_{(mm)}^{(s)} = a_{(mm)}^{\gamma\delta\dots\nu}$ — частная матрица, построенная описанным выше способом из общей матрицы $a_{(nn)}^{(s)}$ после s -го приближения. При этом заметим, что

$$\begin{aligned} 1) \quad a_{(mm)}^{(s)} &= \alpha_{(mm)}^{(s)} + i\beta_{(mm)}^{(s)}, & 2) \quad \bar{a}_{(mm)}^{(s)*} &= \alpha_{(mm)}^{(s)*} - i\beta_{(mm)}^{(s)*}, \\ 3) \quad a_{jk}^{(s)} &= \alpha_{jk}^{(s)} + i\beta_{jk}^{(s)}, & 4) \quad \bar{a}_{kj}^{(s)*} &= \alpha_{kj}^{(s)*} - i\beta_{kj}^{(s)*}, \\ 5) \quad (\alpha_{jk}^{(s)})^* &= \alpha_{kj}^{(s)*}, & (\beta_{jk}^{(s)})^* &= \beta_{kj}^{(s)*}; & 6) \quad \text{tr } a_{(mm)}^{(s)} &= \sum_{j=1}^m a_{jj}. \end{aligned} \quad (35)$$

Тогда мы найдем с учетом сделанных замечаний, что

$$\begin{aligned} \text{tr}[a_{(mm)}^{(s)} \bar{a}_{(mm)}^{(s)*}] &= S_{z=\gamma, \delta, \dots, \nu} [a_{\gamma z}^{(s)} \bar{a}_{z\gamma}^{(s)*} + a_{\delta z}^{(s)} \bar{a}_{z\delta}^{(s)*} + \dots + a_{\nu z}^{(s)} \bar{a}_{z\nu}^{(s)*}] = \\ &= |a_{\gamma\gamma}^{(s)}|^2 + |a_{\delta\delta}^{(s)}|^2 + \dots + |a_{\nu\nu}^{(s)}|^2 + S_{z=\gamma, \delta, \dots, \nu} [|a_{\gamma z}^{(s)}|^2 + |a_{\delta z}^{(s)}|^2 + \dots + |a_{\nu z}^{(s)}|^2]. \end{aligned} \quad (36)$$

Рассмотрим далее след $\text{tr}[a_{(nn)}^{(s)}\bar{a}_{(nn)}^{(s)*}]$ матрицы $[a_{(nn)}^{(s)}\bar{a}_{(nn)}^{(s)*}]$, где $a_{(nn)}^{(s)} = \omega_{(nn)}^{(s)}$ есть s -ое приближение к упрощенной матрице $\omega_{(nn)}$, полученное двойным преобразованием вида (12). Прежде всего мы найдем с учетом (23.5) и (24.5), что

$$\begin{aligned} \text{tr}[a_{(nn)}^{(s)}\bar{a}_{(nn)}^{(s)*}] &= \sum_{j,z=1}^n a_{jz}^{(s)} \bar{a}_{zj}^{(s)*} = \sum_{j=1}^n |a_{jj}^{(s)}|^2 + \sum_{j,z=1}^n |a_{jz}^{(s)}|^2 = \\ &= \sum_{j=1}^n |a_{jj}^{(s)}|^2 + \mathcal{L}^{(s)} + \Delta^{(s)}, \end{aligned} \quad (37)$$

где $\Delta^{(s)} = 0$, если все собственные значения $\lambda_i^{(s)}$ матрицы $a_{(mm)}^{(s)}$ различные, и $\Delta^{(s)} > 0$, если некоторые из значений $\lambda_i^{(s)}$ кратные.

Напишем развернутое выражение для первого члена в равенстве (37), учитывая при этом представление (36) для $\text{tr}[a_{(nn)}^{(s)}\bar{a}_{(nn)}^{(s)*}]$. Тогда мы найдем, что

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n |a_{jj}^{(s)}|^2 &= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \gamma, \delta, \dots, \nu}}^n |a_{jj}^{(s)}|^2 + [|a_{\gamma\gamma}^{(s)}|^2 + |a_{\delta\delta}^{(s)}|^2 + \dots + |a_{\nu\nu}^{(s)}|^2] = \quad (*) \\ &= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \gamma, \delta, \dots, \nu}}^n |a_{jj}^{(s)}|^2 + \text{tr}[a_{(mm)}^{(s)}\bar{a}_{(mm)}^{(s)*}] = S \sum_{\substack{x=\gamma, \delta, \dots, \nu \\ x \neq \gamma}} [|a_{\gamma x}^{(s)}|^2 + |a_{\delta x}^{(s)}|^2 + \dots + |a_{\nu x}^{(s)}|^2]. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \text{tr}[a_{(nn)}^{(s)}\bar{a}_{(nn)}^{(s)*}] &= \mathcal{L}^{(s)} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \gamma, \delta, \dots, \nu}}^n |a_{jj}^{(s)}|^2 + \text{tr}[a_{(mm)}^{(s)}\bar{a}_{(mm)}^{(s)*}] - \quad (38.5) \\ &= S \sum_{\substack{x=\gamma, \delta, \dots, \nu \\ x \neq \gamma}} [|a_{\gamma x}^{(s)}|^2 + |a_{\delta x}^{(s)}|^2 + \dots + |a_{\nu x}^{(s)}|^2] + \Delta^{(s)}. \end{aligned}$$

Подобным же образом для матрицы $(s+1)$ -го приближения $a_{(nn)}^{(s+1)} = \omega_{(nn)}^{(s+1)}$, определяемой согласно (20.s+1), найдем

$$\begin{aligned} \text{tr}[a_{(nn)}^{(s+1)}\bar{a}_{(nn)}^{(s+1)*}] &= \mathcal{L}^{(s+1)} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \gamma, \delta, \dots, \nu}}^n |a_{jj}^{(s+1)}|^2 + \text{tr}[a_{(mm)}^{(s+1)}\bar{a}_{(mm)}^{(s+1)*}] - \quad (38.5+1) \\ &= S \sum_{\substack{x=\gamma, \delta, \dots, \nu \\ x \neq \gamma}} [|a_{\gamma x}^{(s+1)}|^2 + |a_{\delta x}^{(s+1)}|^2 + \dots + |a_{\nu x}^{(s+1)}|^2] + \Delta^{(s+1)}. \end{aligned}$$

Здесь было учтено, что после выполнения s -го приближения мы выделили некоторую частную матрицу $a_{(mm)}^{(s)}$, которая затем была использована для построения приведенной преобразующей матрицы $\tilde{g}_{(nn)}^{(s)}$ входящей в двойное преобразование (20.s+1). Поэтому в частную матрицу $a_{(mm)}^{(s+1)}$ с составляющими $a_{\lambda\lambda}^{(s+1)}$ входят те же строки $\lambda = \gamma, \delta, \dots, \nu$ и те же столбцы $\lambda = \gamma, \delta, \dots, \nu$, что и в матрицу $a_{(mm)}^{(s)} = a_{(mm)}^{\gamma\delta\dots\nu}$. Что касается матрицы $a_{(nn)}^{(s+1)}$, то она, естественно, содержит те же n строк и n столбцов, что и матрица $a_{(nn)}^{(s)}$.

5. Из сопоставления равенств (38.s) и (38.s+1) еще не усматривается сходимость предлагаемого способа, так как

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}[a_{(nn)}^{(s+1)} \bar{a}_{(nn)}^{(s+1)*}] &= \operatorname{tr}[\widetilde{\mathcal{K}}_{(nn)}^{(s)} a_{(nn)}^{(s)} \widetilde{g}_{(nn)}^{(s)} (\widetilde{\mathcal{K}}_{(nn)}^{(s)} a_{(nn)}^{(s)} \widetilde{g}_{(nn)}^{(s)})^*] = \\ &= \operatorname{tr}[\widetilde{\mathcal{K}}_{(nn)}^{(s)} a_{(nn)}^{(s)} \widetilde{g}_{(nn)}^{(s)} \widetilde{g}_{(nn)}^{(s)*} \bar{a}_{(nn)}^{(s)*} \widetilde{\mathcal{K}}_{(nn)}^{(s)*}] \neq \operatorname{tr}[\widetilde{\mathcal{K}}_{(nn)}^{(s)} (a_{(nn)}^{(s)} \bar{a}_{(nn)}^{(s)*}) (\widetilde{\mathcal{K}}_{(nn)}^{(s)})^{-1}] = \\ &= \operatorname{tr}[\widetilde{\mathcal{K}}_{(nn)}^{(s)} (a_{(nn)}^{(s)} \bar{a}_{(nn)}^{(s)*}) \widetilde{g}_{(nn)}^{(s)}] = \operatorname{tr}[a_{(nn)}^{(s)} \bar{a}_{(nn)}^{(s)}], \end{aligned}$$

причем знак \neq поставлен пока по чисто внешним признакам. Поэтому мы несколько изменим наш способ, чтобы получить более простое доказательство его сходимости.

Разложим заданную матрицу $a_{(nn)}$ произвольного вида на эрмитову $b_{(nn)}$ и косоэрмитову $c_{(nn)}$, взяв

$$\begin{aligned} 1) \quad b_{(nn)} &= \frac{1}{2}(a_{(nn)} + \bar{a}_{(nn)}^*), \quad 2) \quad c_{(nn)} = \frac{1}{2}(a_{(nn)} - \bar{a}_{(nn)}^*), \\ 3) \quad a_{(nn)} &= \frac{1}{2}(b_{(nn)} + c_{(nn)}). \end{aligned} \quad (39)$$

Следовательно,

$$1) \quad b_{(nn)} = \bar{b}_{(nn)}^*, \quad 2) \quad c_{(nn)} = -\bar{c}_{(nn)}^*; \quad 3) \quad \operatorname{tr} c_{(nn)} = -\operatorname{tr} \bar{c}_{(nn)}^* = 0_{(nn)}; \quad (40)$$

$$4) \quad a_{(nn)} \bar{c}_{(nn)}^* = \frac{1}{4}[(b_{(nn)} + c_{(nn)})(\bar{b}_{(nn)}^* - \bar{c}_{(nn)}^*)] = \frac{1}{4}(b_{(nn)} \bar{b}_{(nn)}^* - c_{(nn)} \bar{c}_{(nn)}^*);$$

$$\begin{aligned} 5) \quad \operatorname{tr}(a_{(nn)} \bar{a}_{(nn)}^*) &= \frac{1}{4} \operatorname{tr}(b_{(nn)} \bar{b}_{(nn)}^* - c_{(nn)} \bar{c}_{(nn)}^*) = \\ &= \frac{1}{4} [\operatorname{tr}(b_{(nn)} \bar{b}_{(nn)}^*) - \operatorname{tr}(c_{(nn)} \bar{c}_{(nn)}^*)]; \end{aligned}$$

$$6) \quad \bar{b}_{(nn)}^{(s+1)} = (\tilde{u}_{(nn)}^{(s)})^{-1} b_{(nn)}^{(s)} \tilde{u}_{(nn)}^{(s)} = \tilde{\gamma}_{(nn)}^{(s)} b_{(nn)}^{(s)} \tilde{u}_{(nn)}^{(s)},$$

$$7) \quad \bar{c}_{(nn)}^{(s+1)} = (\tilde{w}_{(nn)}^{(s)})^{-1} c_{(nn)}^{(s)} \tilde{w}_{(nn)}^{(s)} = \tilde{\beta}_{(nn)}^{(s)} c_{(nn)}^{(s)} \tilde{w}_{(nn)}^{(s)}.$$

Рассмотрим соотношения (40.6) и (40.7) более подробно.

Обращаясь сначала к двойному преобразованию (40.6) и заметив, что здесь $b_{(nn)}^{(s)} = \bar{b}_{(nn)}^{(s)*}$, получим

$$\begin{aligned} 1) \quad b_{(nn)}^{(s+1)} &= \tilde{\gamma}_{(nn)}^{(s)} b_{(nn)}^{(s)} \tilde{u}_{(nn)}^{(s)} = \tilde{\gamma}_{(nn)}^{(s)} \bar{b}_{(nn)}^{(s)} \tilde{u}_{(nn)}^{(s)}, \\ 2) \quad \bar{b}_{(nn)}^{(s+1)*} &= \tilde{u}_{(nn)}^{(s)*} \bar{b}_{(nn)}^{(s)*} \tilde{\gamma}_{(nn)}^{(s)*} = \tilde{u}_{(nn)}^{(s)*} b_{(nn)}^{(s)} \tilde{\gamma}_{(nn)}^{(s)*}. \end{aligned} \quad (**)$$

Отсюда следует, что если потребовать, чтобы $b_{(nn)}^{(s+1)} = \bar{b}_{(nn)}^{(s+1)*}$, то из (***) найдем

$$1) \quad \tilde{\gamma}_{(nn)}^{(s)} = (\tilde{u}_{(nn)}^{(s)})^{-1} = \tilde{u}_{(nn)}^{(s)*}, \quad 2) \quad \tilde{u}_{(nn)}^{(s)} \tilde{u}_{(nn)}^{(s)} = e_{(nn)}, \quad (41)$$

а это значит, что $\tilde{u}_{(nn)}^{(s)}$ — унитарная матрица. Поэтому тогда

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}[b_{(nn)}^{(s+1)} \bar{b}_{(nn)}^{(s+1)*}] &= \operatorname{tr}[\tilde{\gamma}_{(nn)}^{(s)} b_{(nn)}^{(s)} (\tilde{u}_{(nn)}^{(s)} \tilde{u}_{(nn)}^{(s)*}) \bar{b}_{(nn)}^{(s)*} \tilde{\gamma}_{(nn)}^{(s)*}] = \\ &= \operatorname{tr}[\tilde{\gamma}_{(nn)}^{(s)} (b_{(nn)}^{(s)} \bar{b}_{(nn)}^{(s)*}) \tilde{u}_{(nn)}^{(s)}] = \operatorname{tr}[b_{(nn)}^{(s)} \bar{b}_{(nn)}^{(s)*}]. \end{aligned} \quad (42)$$

Обращаясь затем к двойному преобразованию (40.7) и замечая, что здесь $c_{(nn)}^{(s)} = -\bar{c}_{(nn)}^{(s)*}$, получим

$$\begin{aligned}
 1) \quad c_{(nn)}^{(s+1)} &= \bar{\beta}_{(nn)}^{(s)} c_{(nn)}^{(s)} \tilde{\omega}_{(nn)}^{(s)} = -\beta_{(nn)}^{(s)} \bar{c}_{(nn)}^{(s)*} \tilde{\omega}_{(nn)}^{(s)}, & (***) \\
 2) \quad \bar{c}_{(nn)}^{(s+1)} &= \tilde{\omega}_{(nn)}^{(s)} \bar{c}_{(nn)}^{(s)*} \bar{\beta}_{(nn)}^{(s)} = -\tilde{\omega}_{(nn)}^{(s)} c_{(nn)}^{(s)} \bar{\beta}_{(nn)}^{(s)*}.
 \end{aligned}$$

Следовательно, если потребовать, чтобы $c_{(nn)}^{(s+1)} = -\bar{c}_{(nn)}^{(s+1)*}$, то из (***) получим.

$$1) \quad \bar{\beta}_{(nn)}^{(s)} = (\tilde{\omega}_{(nn)}^{(s)})^{-1} = -\tilde{\omega}_{(nn)}^{(s)*}, \quad 2) \quad \tilde{\omega}_{(nn)}^{(s)*} \tilde{\omega}_{(nn)}^{(s)} = -e_{(nn)}. \quad (43)$$

Отсюда вытекает, что

$$\begin{aligned}
 \text{tr} [c_{(nn)}^{(s+1)} \bar{c}_{(nn)}^{(s+1)*}] &= \text{tr} [\bar{\beta}_{(nn)}^{(s)} c_{(nn)}^{(s)} (\tilde{\omega}_{(nn)}^{(s)} \tilde{\omega}_{(nn)}^{(s)*}) \bar{c}_{(nn)}^{(s)*} \bar{\beta}_{(nn)}^{(s)*}] = \\
 &= \text{tr} [\bar{\beta}_{(nn)}^{(s)} (c_{(nn)}^{(s)} \bar{c}_{(nn)}^{(s)*}) \tilde{\omega}_{(nn)}^{(s)}] = \text{tr} [c_{(nn)}^{(s)} \bar{c}_{(nn)}^{(s)*}].
 \end{aligned} \quad (44)$$

Сопоставляя, наконец, (42) и (44) с (40.5), найдем для матриц $a_{(rr)}^{(s)}$ и $a_{(rr)}^{(s+1)}$ входящих в (38.s) и (38.s+1), следующее общее соотношение при $r=m, n$:

$$\text{tr} [a_{(rr)}^{(s+1)} \bar{a}_{(rr)}^{(s+1)*}] = \text{tr} [a_{(rr)}^{(s)} \bar{a}_{(rr)}^{(s)*}], \quad (r=m, n). \quad (45)$$

Кроме того, принимая во внимание особое строение (19) матриц $\tilde{g}_{(nn)}^{(s)}$ и $\tilde{ж}_{(nn)}^{(s)}$ в двойном преобразовании (20.s+1), устанавливаем наличие дополнительных соотношений

$$1) \quad a_{jj}^{(s)} = a_{jj}^{(s+1)}, \text{ если } j \neq \gamma, \delta, \dots, \nu; \quad 2) \quad \sum_{i=\gamma, \delta, \dots, \nu}^n |a_{ij}^{(s)}|^2 = \sum_{j=1}^n |a_{jj}^{(s+1)}|^2. \quad (46)$$

Сопоставляя теперь равенства (38.s) и (38.s+1) с учетом соотношений (45), (46), приходим к выводу, что

$$\begin{aligned}
 \Delta^{(s+1)} &= \Delta^{(s)} - S \left[(|a_{\gamma\gamma}^{(s)}|^2 - |a_{\gamma\gamma}^{(s+1)}|^2) + (|a_{\delta\delta}^{(s)}|^2 - |a_{\delta\delta}^{(s+1)}|^2) + \right. \\
 &\quad \left. + \dots + (|a_{\nu\nu}^{(s)}|^2 - |a_{\nu\nu}^{(s+1)}|^2) \right],
 \end{aligned} \quad (47)$$

так как $\Delta^{(s)} = \Delta^{(s+1)}$. Но преобразующие матрицы $\tilde{g}_{(nn)}^{(s)}$ мы строим таким образом, чтобы преобразованная согласно (20.s+1) матрица $a_{(nn)}^{(s+1)} = \omega_{(nn)}^{(s+1)}$ удовлетворяла условиям

$$a_{x\mu}^{(s+1)} = 0, \text{ если } x, \mu = \gamma, \delta, \dots, \nu \cap [(x \neq \mu) \cup (x = \mu \cap \mu + 1)]. \quad (48)$$

Поэтому равенство (47) принимает следующий окончательный вид:

$$\Delta^{(s+1)} \Delta^{(s)} - S \left[|a_{\gamma\gamma}^{(s)}|^2 + |a_{\delta\delta}^{(s)}|^2 + \dots + |a_{\nu\nu}^{(s)}|^2 \right], \quad (47.1)$$

откуда вытекает, что действительно

$$\Delta^{(s+1)} < \Delta^{(s)}, \quad (s=0, 1, 2, \dots). \quad (25)$$

Следовательно, предлагаемый способ решения спектральной задачи для произвольной матрицы $a_{(nn)}$ всегда сходится. Равенство

(48.1) показывает также, что чем больше порядок mm вспомогательной матрицы $a_{(mm)}^{(s)} = \tilde{a}_{(mm)}^{s \dots s}$, тем быстрее последовательность матриц $a_{(nn)}^{(s)} = \omega_{(nn)}^{(s)}$ приближается к упрощенной матрице $\omega_{(nn)}$.

6. Спектральную задачу для произвольной матрицы $a_{(nn)}$ можно решать также иным путем, использованным при доказательстве сходимости предлагаемого способа, а именно: выражая заданную матрицу $a_{(nn)}$ через соответствующие эрмитову $b_{(nn)}$ и косоэрмитову $c_{(nn)}$ матрицы

$$1) b_{(nn)} = \frac{1}{2}(a_{(nn)} + \bar{a}_{(nn)}^*), \quad 2) c_{(nn)} = \frac{1}{2}(a_{(nn)} - \bar{a}_{(nn)}^*), \quad (49)$$

$$3) a_{(nn)} = \frac{1}{2}(b_{(nn)} + c_{(nn)}).$$

Затем решаем две частные спектральные задачи.

$$1) (b_{(nn)} - \mu e_{(nn)})u_{(n1)} = 0_{(n1)}, \quad 2) (c_{(nn)} - \nu e_{(nn)})\omega_{(n1)} = 0_{(n1)} \quad (50)$$

описанным выше способом, то есть широко опираясь при этом на способ Данилевского. В этом случае существенно упрощается определение обратных преобразующих матриц $\tilde{\eta}_{(nn)}$ и $\tilde{\beta}_{(nn)}$, так как согласно (41) и (43)

$$\begin{aligned} 1) \tilde{\eta}_{(nn)}^{(s)} &= \bar{u}_{(nn)}^{(s)*}, & 3) \tilde{\beta}_{(nn)}^{(s)} &= -\bar{\omega}_{(nn)}^{(s)*}, \\ 2) \tilde{u}_{(nn)}^{(s)} \bar{u}_{(nn)}^{(s)*} &= e_{(nn)}, & 4) \tilde{\omega}_{(nn)}^{(s)} \bar{\omega}_{(nn)}^{(s)*} &= -e_{(nn)}. \end{aligned} \quad (51)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Г. Курош. Курс высшей алгебры. М., Физматгиз, 1962.
2. Д. К. Фаддеев и В. Н. Фаддеева. Вычислительные методы линейной алгебры. М.-Л., Физматгиз, 1963.
3. В. В. Воеводин. Численные методы алгебры. М., «Наука», 1966.