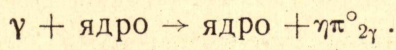


**МЕТОДИКА ОБРАБОТКИ ЭКСПЕРИМЕНТА  
ПО ФОТОРОЖДЕНИЮ НЕЙТРАЛЬНЫХ МЕЗОНОВ  
НА СЛОЖНЫХ ЯДРАХ**

С. М. БЕРСЕНЕВ, Г. Н. ДУДКИН, В. Н. ЕПОНЕШНИКОВ, Ю. Ф. КРЕЧЕТОВ,  
Н. И. САБЛИН, В. А. ТРЯСУЧЕВ

(Представлена научно-техническим семинаром лаборатории  
высоких энергий НИИ ЯФ)

В настоящее время в лаборатории высоких энергий проводится измерение сечений фоторождения нейтральных мезонов на сложных ядрах. Исследуются реакции:



С помощью двух черенковских спектрометров полного поглощения регистрируются два  $\gamma$ -кванта от распада мезонов. Энергии распадных  $\gamma$ -квантов, получаемых в виде десятичного кода (номера каналов амплитудных анализаторов), выводятся на цифропечать, перфоленду или магнитную ленту. Подробное описание установки и методики регистрации приведено в работе [1].

**I. Моделирование эксперимента**

Непосредственным результатом эксперимента является выход реакции  $N$ , связанный с дифференциальным сечением  $\frac{d\sigma}{d\Omega}(E, \Omega)$  соотношением:

$$N = n \int_E \int_{\Omega} \frac{d\sigma}{d\Omega}(E, \Omega) \cdot \varepsilon(E, \Omega) \cdot \xi(E) \cdot dE \cdot d\Omega, \quad (1)$$

где  $n$  — число ядер в мишени на  $1 \text{ см}^2$ ;  
 $\varepsilon(E, \Omega)$  — эффективность регистрации исследуемого процесса экспериментальной установкой;

$\xi(E)$  — тормозной спектр  $\gamma$ -квантов, падающих на мишень;

$E$  — энергия падающих  $\gamma$ -квантов;

$\Omega$  — угловые координаты направления вылета мезонов.

Зависимость  $\xi(E)$  бралась из таблиц [2]. В интеграле (1) остается неизвестной зависимость  $\varepsilon(E, \Omega)$ , в которую входят конкретные условия эксперимента (кинематика, размеры мишени, телесные углы спектрометров и т. д.).

В такого рода экспериментах дифференциальное сечение выносится из-под знака интеграла (1) как усредненное по угловому и энергетическому разрешениям установки, которые определяются следующим образом:



$$R(\Omega) = \int_E \xi(E) \cdot \varepsilon(E, \Omega) \cdot dE, \quad (2)$$

$$R(E) = \xi(E) \cdot \int_{\Omega} \varepsilon(E, \Omega) \cdot d\Omega. \quad (3)$$

Тогда оставшийся интеграл

$$\varepsilon = \int_E \int_{\Omega} \xi(E) \cdot \varepsilon(E, \Omega) \cdot dE \cdot d\Omega \quad (4)$$

означает полную вероятность регистрации процесса фоторождения для определенной геометрии измерений. Интегралы (1), (2), (3) рассчитываются обычно с помощью ЭВМ методом Монте-Карло. В этом случае составляется вероятностная математическая модель эксперимента, в которой учитываются конкретные условия эксперимента, начиная от взаимодействия падающих  $\gamma$ -квантов с мишенью и кончая регистрацией  $\gamma$ -квантов от распада мезонов черенковскими спектрометрами.

Модель эксперимента реализована в виде программы, составленной в символах  $\alpha$ -языка. При расчете учитывалось импульсное распределение нуклонов в ядре. В работе [3] показано, что от вида этого распределения величина  $\varepsilon$  очень мало зависит. Поэтому была выбрана наиболее простая модель вырожденного ферми-газа:

$$\bar{f}(p) = \begin{cases} \text{const.}, & P \leq P_f, \\ 0, & P > P_f, \end{cases} \quad (5)$$

где  $P_f$  — граничный импульс ферми.

При вычислении энергетического распределения распадных  $\gamma$ -квантов и мезонов, регистрируемых установкой, происходил учет конечного энергетического разрешения спектрометров, которое снималось экспериментально [4].

С целью уменьшения времени решения задачи на ЭВМ был сделан дополнительный отбор событий регистрации мезонов [10]. Существует азимутальная симметрия эксперимента и вероятность регистрации не изменится, если оба спектрометра повернуть на одинаковый угол вокруг оси, связанной с пучком тормозного излучения. Это позволяет «установить» в схеме расчета несколько пар счетчиков и тогда вычисленную величину эффективности необходимо разделить на число этих пар. Кроме того, при вращении спектрометра вокруг оси, его окно опишет кольцевую область. Поэтому проверялось попадание распадных  $\gamma$ -квантов сначала в эту кольцевую область. При таком дополнительном отборе время счета задачи уменьшается в несколько раз.

Кроме интегралов (2, 3, 4), вычисляются следующие величины:

1) средний угол вылета мезонов

$$\overline{\cos \theta} = \frac{\int R(\cos \theta) \cdot \cos \theta \cdot d \cos \theta}{\int R(\cos \theta) \cdot d \cos \theta}, \quad (6)$$

2) средняя энергия падающих  $\gamma$ -квантов

$$\bar{E} = \frac{\int R(E) \cdot E \cdot dE}{\int R(E) \cdot dE}; \quad (7)$$

3) спектры энергий распадных  $\gamma$ -квантов, энергетическое и массовое распределения регистрируемых мезонов с учетом и без учета ко-



нечного энергетического разрешения спектрометров. Массовое распределение находилось из формулы:

$$\mu = \sqrt{4 \cdot \sin^2 \frac{\alpha_{cp}}{2} \cdot E_{\gamma 1} \cdot E_{\gamma 2}}, \quad (8)$$

где  $\mu$  — масса мезона,

$E_{\gamma 1,2}$  — энергия распадных  $\gamma$ -квантов,

$\alpha_{cp}$  — средний угол раствора между спектрометрами.

Целью моделирования является также определение допустимой области регистрации в плоскости  $E_{\gamma 1} \text{ } 0 \text{ } E_{\gamma 2}$ , под которой понимается область, в которой с заданной вероятностью  $\beta$  находятся события изучаемого процесса. Для построения области делается предположение о нормальном законе распределения полезных событий в плоскости  $E_{\gamma 1} \text{ } 0 \text{ } E_{\gamma 2}$ ; тогда спектры  $N(E_{\gamma 1})$ ,  $N(E_{\gamma 2})$ ,  $N(E_{\eta, \pi^0})$  можно считать группированными выборками из нормального закона. Оценки параметров  $m$  и  $\sigma$  для спектров находились методом максимального правдоподобия [5]. Для этого составлена программа, реализующая метод случайного поиска для нахождения максимума функции правдоподобия по параметрам  $m$  и  $\sigma$ :

$$L(m, \sigma) = \sum_{i=1}^{k-1} N_i \cdot \log P_i, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} P_i &= F(x_{i+1}) - F(x_i) = \Phi\left(\frac{x_{i+1} - m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_i - m}{\sigma}\right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \int_{\frac{x_i - m}{\sigma}}^{\frac{x_{i+1} - m}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt; \end{aligned}$$

$N_i$  — число событий, попавших в интервал  $[x_i, x_{i+1})$ ;

$$x = E_{\gamma 1}, E_{\gamma 2}, E_{\eta, \pi^0}.$$

Кроме того, программа находит статистические ошибки параметров

$$\theta = m, \sigma,$$

$$\sigma(\theta) = \left( \sum_{i=1}^{k-1} N_i \cdot A \right)^{-1/2},$$

$$A = \sum_{i=1}^{k-1} P_i \left( \frac{\partial \log P_i}{\partial \theta} \Big|_{\substack{m=\hat{m} \\ \sigma=\hat{\sigma}}} \right)^2,$$

$\hat{m}$ ,  $\hat{\sigma}$  — оценки максимального правдоподобия. Имея эти оценки для спектров  $N(E_{\gamma 1})$ ,  $N(E_{\gamma 2})$ ,  $N(E_{\eta, \pi^0})$ , можно записать уравнение эллипса, ограничивающего допустимую область регистрации:

$$\begin{aligned} \left( \frac{E_{\gamma 1} - \hat{m}_{E_{\gamma 1}}}{\hat{\sigma}_{E_{\gamma 1}}} \right)^2 + \left( \frac{E_{\gamma 2} - \hat{m}_{E_{\gamma 2}}}{\hat{\sigma}_{E_{\gamma 2}}} \right)^2 - 2 \cdot \rho \cdot \frac{(E_{\gamma 1} - \hat{m}_{E_{\gamma 1}}) \cdot (E_{\gamma 2} - \hat{m}_{E_{\gamma 2}})}{\hat{\sigma}_{E_{\gamma 1}} \cdot \hat{\sigma}_{E_{\gamma 2}}} = \\ = 2 \cdot (1 - \rho^2) \cdot \ln(1 - \beta), \end{aligned} \quad (10)$$

$$\rho = \frac{1}{2 \cdot \hat{\sigma}_{E_{\gamma 1}} \hat{\sigma}_{E_{\gamma 2}}} \left[ \hat{\sigma}_{E_{\eta, \pi^0}}^2 - \hat{\sigma}_{E_{\gamma 1}}^2 - \hat{\sigma}_{E_{\gamma 2}}^2 \right].$$



Последнее равенство следует из закона сохранения энергии:

$$E_{\eta, \pi^0} = E_{\gamma 1} + E_{\gamma 2} \quad (11)$$

и, следовательно,

$$\hat{\sigma}_{E_{\eta, \pi^0}}^2 = \sigma_{E_{\gamma 1}}^2 + \sigma_{E_{\gamma 2}}^2 + 2 \cdot \text{cov}(E_{\gamma 1}, E_{\gamma 2}).$$

Вследствие низкоэнергетического фона на область может накладываться условие усечения:

$$E_{\gamma 1} + E_{\gamma 2} > E \text{ усечения.}$$

В этом случае допустимая область регистрации ограничена эллипсом и прямой

$$E_{\gamma 1} + E_{\gamma 2} = E \text{ усечения,}$$

## II. Первичная обработка

Для данного типа экспериментов первичная обработка естественным образом разбивается на следующие этапы.

1. Фиксация первичных физических эффектов и перевод их в цифровой код данной ЭВМ.
2. Учет аппаратурных сбоев и фоновых измерений.
3. Обработка с целью идентификации регистрируемого процесса.
4. Оценка выхода реакции и его дисперсии.

Для реализации 1 и 2 этапов составлена программа, которая производит группирование зарегистрированных событий в энергетические и массовые спектры мезонов, используя выражения (8), (11). События  $(E_{\gamma 1}, E_{\gamma 2})$  в виде последовательности кодов

$$P = \{(N_1, N_2)_i\}$$

являются входной информацией программы.

$N_1, N_2$  — номера каналов анализаторов, связанные с энергией следующим образом:

$$E_{\gamma} = d_j \times N_j + b_{\gamma}, \quad j = 1, 2,$$

где  $d_j, b_j$  — коэффициенты, определяемые калибровкой спектрометров. Допустимая область регистрации задается условием, аппроксимирующим эллипс (10) с наложенным усечением:

$$\underline{E_{\gamma 1}} \leq E_{\gamma 1} \leq \bar{E}_{\gamma 1} \wedge \underline{E_{\gamma 2}} \leq E_{\gamma 2} \leq \bar{E}_{\gamma 2} \wedge \underline{E_{\eta, \pi^0}} \leq E_{\eta, \pi^0} \leq \bar{E}_{\eta, \pi^0}. \quad (12)$$

Последовательность работы программы следующая:

- 1) из последовательности  $P$  выбрасываются повторы, которыми в данном эксперименте называется подпоследовательность

$$P' = \{(N'_1, N'_2)_i\} \subseteq P,$$

где  $(N'_1, N'_2)_i = (N_1, N_2)_i$ , если

$$N_{1, i} = N_{1, i-1} \vee N_{2, i} = N_{2, i-1};$$

- 2) отбрасываются события, не удовлетворяющие (12);
- 3) формируются спектры

$$N(E_{\gamma 1}), N(E_{\gamma 2}), N(E_{\eta, \pi^0}), N(\mu_{\eta, \pi^0})$$

с учетом фоновых измерений.

Идентификацию нейтральных мезонов в данном типе экспериментов целесообразно проводить по энергии мезона. Для этого обрабатывается энергетический спектр  $N(E_{\eta, \pi^0})$ , который при наложении усечения на область регистрации имеет вид группированной выборки



из усеченного нормального закона. Среднее значение  $E_{\eta, \pi^0 \text{ ср}}$  определяется нахождением максимума функции (9). В этом случае

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < x_1, \\ \frac{\Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1-m}{\sigma}\right)}{1 - \Phi\left(\frac{x_1-m}{\sigma}\right)}, & \text{если } x \leq x_1. \end{cases}$$

где  $x_1 = E_{\text{усечения}}$ .

Свойства оценок такого вида распределений исследованы и решена задача оптимального группирования с целью уменьшения дисперсии среднего [7]. Для расчета оптимальных интервалов составлена программа, реализующая метод линеаризации [6], скорость сходимости которого не зависит от числа интервалов. Для идентификации использована статистика [8]:

$$Z = \frac{E_{\eta, \pi^0 \text{ ср}} - \hat{m}_{E_{\eta, \pi^0}}}{\sigma \left( E_{\eta, \pi^0 \text{ ср}} - \hat{m}_{E_{\eta, \pi^0}} \right)},$$

которая имеет нормальное распределение

$$N \left( 0, \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_{\eta, \pi^0}^2}{n} + \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{k-1} N_i}} \right);$$

здесь

$n$  — число событий, полученных при моделировании эксперимента;  
 $\hat{m}_{E_{\eta, \pi^0}}, \hat{\sigma}_{\eta, \pi^0}^2$  — оценки для энергетического спектра при моделировании,

$E_{\eta, \pi^0 \text{ ср}}, \sigma$  — оценки экспериментального энергетического спектра.

Критическая область задается соотношением

$$|Z| > Z_q,$$

$q$  — уровень значимости.

В случае положительного ответа при проверке гипотезы величина

$$N = N' + \delta N,$$

где

$$N' = \sum_{i=1}^{k-1} N_i,$$

$$\delta N = N' \left\{ \left[ 1 - \Phi \left( \frac{x_1 - \hat{m}_{E_{\eta, \pi^0}}}{\hat{\sigma}} \right) \right]^{-1} - 1 \right\}$$

определяет с учетом набранной дозы и эффективности величину дифференциального сечения на ядре

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{N \cdot \varepsilon'}{n \cdot \varepsilon \cdot N_T}.$$



В этой формуле

$\epsilon'$  — коэффициент, связанный с поглощением распадных и падающих  $\gamma$ -квантов,

$N_\gamma$  — число эквивалентных  $\gamma$ -квантов.

Ошибка выхода  $N$  вычисляется как  $\Delta N = (N' + N \text{ фоновые})^{1/2}$ .

Описанная методика использована при обработке эксперимента [9].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Н. Дудкин и др. Методика эксперимента по регистрации нейтральных мезонов. Тр. VII межвузовской конференции по электронным ускорителям. (Томск, 1968). Вып. 4, Атомиздат, 1970.
2. А. С. Пенфольд, Ж. Е. Лейсс. Расчет поперечных сечений фотоэффекта. Иллинойский университет, 1958.
3. С. Васси et al. Preprint, LNF-69/4, 1969.
4. Г. Н. Дудкин и др. Труды научно-исследовательского института ядерной физики, электроники и автоматики при Томском политехническом институте. Вып. 2. Ускорители и радиоэлектроника физического эксперимента. Атомиздат, 1972.
5. Н. А. Бодин. Оценка параметров распределения по группированным выборкам. Тр. мат. инст. АН СССР, СХ1, 1970.
6. И. Н. Силин. Нахождение минимумов функционалов методом липеаризации. Препринт ОИЯИ Д-В10, 1963.
7. С. М. Берсенев, Н. И. Саблин. Одновременное оценивание параметров усеченного нормального закона по группированной выборке. Тезисы докладов всесоюзной конференции «Разработка и практическое применение электронных ускорителей». Томск, изд-во ТГУ, 1972.
8. И. В. Дунин-Барковский, Н. В. Смирнов. Теория вероятностей и математическая статистика в технике (общая часть) М., 1955.
9. Г. Н. Дудкин и др. Фоторождение  $\pi^0$ -мезонов на сложных ядрах при  $E_{\text{max}} = 500, 700$  МэВ. Тезисы докладов Всесоюзной конференции «Ядерные реакции при высоких энергиях». М., 1972, Тбилиси, 1972.
10. С. П. Денисов. Диссертация. МГУ, 1963.