ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 122 1962

К ВОПРОСУ О МАГНИТНОМ ПОЛЕ С НАИЛУЧШИМИ ФОКУСИРУЮЩИМИ СВОЙСТВАМИ

П. А. ЧЕРДАНЦЕВ

В процессе инжекции и ускорения электронов в камере бетатрона существует значительный пространственный заряд, движущийся со скоростями, близкими к скорости света. Этот заряд создает дополнительное магнитное поле, действующее на пучок. Если рассматривать равновесный пучок, то есть такой пучок, в котором фокусирующие электростатические силы компенсируются магнитными фокусирующими, то состояние равновесия определяется в частности и собственным магнитным полем пучка.

В статье [1] было получено уравнение поля с учетом пространственного заряда в виде

$$\frac{\nabla^2 U}{U}-\frac{1}{U^2-1}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right]-\frac{U^2-1}{r^2}=0, \qquad (1)$$

где $U=\frac{eV_p}{m_0c^2}$, V_p — релятивистская потенциальная функция магнитного поля.

Для упрощения этого уравнения введем вместо U новую функцию w соотношением $U=\operatorname{ch}\frac{w}{2}$.

Тогда получаем следующее уравнение

$$\nabla^2 w-\frac{\operatorname{sh} w}{r^2}=0. \qquad (2)$$

Данное уравнение является нелинейным, и решить его в таком виде не удается.

Проведем линеаризацию его, разложив $\operatorname{sh} w$ в ряд по степеням w около значения w_0 на равновесной орбите. Ограничиваясь линейным членом, получаем

$$\operatorname{sh} w=\operatorname{sh} w_0+\operatorname{ch} w_0\,(w-w_0)$$

и

$$\nabla^2(w-w_0)-\frac{\operatorname{sh} w_0}{r^2}-\operatorname{ch} w_0\frac{(w-w_0)}{r^2}=0.$$

Обозначим $\operatorname{ch} w_0$ через m^2 и выберем решение в виде суммы

$$w-w_0=\varphi+A,$$

где $A=\mathrm{const}$. Тогда, если выбрать $A=-\operatorname{th} w_0$, то для φ получим уравнение

$$\nabla^2\varphi-m^2\frac{\varphi}{r^2}=0. \tag{3}$$

Исходное уравнение для U следует решить при граничных условиях, заданных на контуре Г, ограничивающем область фокусирующих сил

$$U|_\Gamma U_0=\mathrm{const}.$$

Такое же условие наложено на φ

$$\varphi|_\Gamma=\varphi_0=\mathrm{const}.$$

Выберем форму граничной эквипотенциальной линии в соответствии с реальными условиями. Так как магнитное поле бетатрона создается полюсами, имеющими клинообразный профиль, то по этой причине ускорительная камера должна иметь овальное сечение с меньшей кривизной на внешней стороне для как можно более полного использования области фокусирующих сил. Необходимо найти поле, эквипотенциальными линиями которого являлись бы овалы, вписанные в камеру. В этом случае камера будет использована с наибольшей эффективностью.

Разделение переменных в уравнении Лапласа

$$\nabla^2 U=0$$

можно провести, если система ортогональных криволинейных координат α, β, ϑ определяется равенством

$$r+iz=f(\alpha+i\beta)$$

и $f(\zeta)$ удовлетворяет уравнению

$$f'^2(\zeta)=\sum_{k=0}^{4}\lambda_k f^k(\zeta),$$

где λ_k—постоянные [2].

Если выбрать $\lambda_0=k'^2, \lambda_2=1+k'^2, \lambda_4=1, \lambda_1=\lambda_3=0$, то координаты α и β вводятся путем преобразования [3]

$$r+iz=a\,dn\,(K'i-\alpha-i\beta), \tag{4}$$

где $-K<\alpha<K$, $0<\beta<K'$, $K(k)$—эллиптический интеграл первого рода, $K'=K(k')$, $k^2+k'^2=1$, $dn\,u$—эллиптическая функция Якоби.

Кривые $\alpha=\mathrm{const}$ и $\beta=\mathrm{const}$ образуют в плоскости (r,z) два ортогональных семейства. Координатная линия $\beta=\beta_0$ изображает сечение кольца. Причем $0\leqslant\beta\leqslant\beta_0$ соответствует области вне кольца, а $\beta_0\leqslant\beta\leqslant K'$ —внутренней области.

Модуль эллиптического интеграла k характеризует форму линий $\beta=\mathrm{const}$. В частности, при $k=0$, мы получаем кольцо круглого сечения; $k\neq0$ дает кольца овальных сечений, переходящие в плоские кольца при $\beta_0 \to K'$. Модуль k связан с характеристиками плоского кольца соотношением

$$k = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2},$$

где a—внешний радиус, b—внутренний радиус его.

Исходя из преобразования (4), получаем:

$$r = a \frac{dn\,\alpha sn'\beta}{1 - cn^2\alpha cn'^2\beta}, \quad z = a \frac{sn\,\alpha\, cn\,\alpha\, cn'\beta\, dn'\beta}{1 - cn^2\alpha\, cn'^2\beta},$$

где $sn\alpha$, $cn\alpha$, $dn\alpha$ и другие функции являются эллиптическими функциями Якоби, $sn'\beta = sn(\beta, K')$ и аналогично все другие штрихованные функции.

Перейдем в уравнении (3) от координат (r,z) к координатам (α,β). Введем новую функцию F

$$\varphi = \frac{F}{\sqrt{r}}.$$

Для F получаем уравнение в координатах α,β:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial \beta^2} + \frac{1}{4}(1 - 4m^2) \left\{\left(\frac{k^2 sn\,\alpha\, cn\,\alpha}{dn\alpha}\right)^2 - \right.$$

$$\left. - \left[\frac{k^2 \mathrm{sn}\,(K'i - i\beta)\, cn\,(K'i - i\beta)}{dn\,(K'i - i\beta)}\right]^2\right\} F = 0. \qquad (5)$$

Будем искать решение последнего уравнения в форме

$$F = A(\alpha) B(\beta).$$

После разделения переменных получаем

$$A'' + \left(\lambda + \frac{1}{4}(1 - 4m^2)\left(\frac{k^2 sn\,\alpha\, cn\,\alpha}{dn\,\alpha}\right)^2\right] A = 0; \qquad (6)$$

$$B'' - \left\{\lambda + \frac{1}{4}(1 - 4m^2)\left[\frac{k^2 sn\,(K'i - i\beta) cn\,(K'i - i\beta)}{dn(K'i - i\beta)}\right]^2\right\} B = 0, \qquad (7)$$

где λ—постоянная разделения.

Для внутренней области кольца решения уравнения (6) имеют вид

$$A_0 = 1 - \frac{1}{2} q^2 (1 - 4m^2) \cos 2x \ldots$$

$$A_1 = \cos x - \frac{1}{8} q^2 (1 - 4m^2) \cos 3x - \ldots \qquad (8)$$

. . . .

$$A_n = \cos nx - (1 - 4m^2) q^2 \left[\frac{\cos(n+2)x}{4(n+1)} - \frac{\cos(n-2)x}{4(n-1)}\right] + \ldots$$

$$n = 2, 3, \ldots, \infty, \quad x = \frac{\pi\alpha}{K}, \; q = e^{-\pi\frac{K'}{K}}$$

Решения уравнения (7) имеют вид

$$Q_{mn}(\beta,K)=\int\limits_{-K}^{K}\left\{\frac{dn\,\xi\,dn\,(K'i-i\beta)}{1-k^2sn^2\xi sn^2\,(K'i-i\beta)}\right\}^{m+\frac{1}{2}}A_n(\xi)\,d\xi.$$

Общее решение уравнения (3)

$$\varphi=\sqrt{\frac{a}{r}}\,\varphi_0\sum_{n=0}^{\infty}M_nQ_{mn}(\beta)\,A_n(\alpha),$$

где $\varphi_0=\varphi(\alpha,\beta_0)$. Из граничного условия для φ получаем

$$M_n=\frac{Q_{on}(\beta_0)}{Q_{mn}(\beta_0)\int\limits_{-K}^{+K}A_n^2\,d\alpha}.$$

Таким образом,

$$\varphi=\varphi_0\left(\frac{dn\,\alpha\,dn\,(k'i-i\beta)}{1-k^2\,sn^2\alpha\,sn^2\,(k'i-i\beta)}\right)^{-1/2}\cdot$$

$$\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{Q_{on}(\beta_0)Q_{mn}(\beta)}{\int\limits_{-K}^{+K}A_n^2\,d\alpha\,Q_{mn}(\beta_0)}A_n(\alpha) \tag{9}$$

Значение β_0, через которую определяются коэффициенты M_n, зависит от размеров области фокусирующих сил. Зададим на контуре Γ координаты $R_{\min}$ и $R_{\max}$ при $z=0$:

$$R_{\min}=a\,\frac{dn\,\alpha\,sn'\,\beta_0}{1-cn^2\,\alpha\,cn'^2\,\beta_0}\bigg|_{\alpha=\pm K}=ak'sn'\beta_0,$$

$$R_{\max}=a\,\frac{dn\,\alpha\,sn'\,\beta_0}{1-cn^2\alpha\,cn'^2\beta_0}\bigg|_{\alpha=0}=\frac{a}{sn'\beta_0}.$$

Тогда

$$\frac{R_{\min}}{R_{\max}}=\eta^2=k'\,sn'^2\,\beta_0,$$

или

$$sn'\beta_0=\frac{\eta}{k'^{1/2}}.$$

При малых k получаем

$$\beta_0=Arth\,\eta\left(1+\frac{k^2}{4}\right). \tag{10}$$

Найденное поле дает возможность вычислить равновесную плотность заряда и полный максимальный заряд, удерживаемый данным полем. Полный заряд Q является важной характеристикой бетатрона. Он показывает максимальные возможности поля бетатрона. Исследования показали, что интенсивность излучения пропорциональна максимальному заряду. Поэтому важно знать зависимость полного заряда от формы поля. Оптимальным будет такое поле, для которого заряд будет максимальным. Для вычисления равновесной плотности найдем V_p как функцию φ. Мы имели

$$U = \frac{eV_p}{m_0c^2} = ch\frac{w}{2}.$$

Поэтому
$$V_p = \frac{m_0c^2}{e} ch\frac{1}{2}(-th\,w_0 + w_0 + \varphi) =$$

$$= V_0\left(1 + th\frac{1}{2}(w_0 + th\,w_0)\frac{\varphi}{2}\right).$$

Отсюда плотность заряда

$$\rho = -\frac{1}{4\pi}\nabla^2 V_p = -\frac{N}{2\pi}\nabla^2\varphi,$$

где

$$N = \frac{m_0c^2}{4e} sh\frac{1}{2}(w_0 - th\,w_0).$$

Учтем уравнение для φ. Тогда

$$\rho = -\frac{N}{2\pi}m^2\frac{\varphi}{r^2} = \frac{\mathfrak{A}}{2\pi}\frac{\varphi}{r^2}.$$

Полный заряд в камере равен

$$Q = \mathfrak{A}\int_{r_1}^{r_2}\int_{z_1}^{z_2}\frac{\varphi}{r}\,dr\,dz. \tag{11}$$

Q является функцией формы поля. В нашем случае форма поля характеризуется параметром k, поэтому

$$Q = Q(k).$$

В формуле (11) необходимо перейти от интегрирования по r, z к интегрированию по α и β. Якобиан перехода от r, z к α, β равен

$$I^2 = a^2\left|\frac{d\,dn\,(k'i - \zeta)}{d\zeta}\right|^2,$$

или после вычисления производной

$$I^2 = r^2\left\{\left(\frac{k^2 sn\,\alpha\,cn\,\alpha}{dn\,\alpha}\right)^2 + \left(\frac{cn'\beta\,dn'\beta}{sn'\beta}\right)^2\right\}.$$

Итак, получаем

$$Q = \mathfrak{A}\int_{-K}^{+K}\int_{K'}^{\beta_0}\frac{\varphi}{r}\left|\frac{df}{d\zeta}\right|^2 d\alpha\,d\beta = \mathfrak{A}\int_{-K}^{+K}\int_{K'}^{\beta_0}\varphi r\left\{\quad\right\}d\alpha\,d\beta. \tag{12}$$

Представим $Q(k)$ в виде ряда по k. В формуле (12) можно перейти от α к новой переменной $y = \frac{\pi\alpha}{2K}$, тогда интегрирование по α в пределах от $-K$ до K перейдет к интегрированию по y в пределах от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$.

Функции от α и β мы разложим в ряды по k. Фигурная скобка под знаком интеграла примет вид

$$\left\{\quad\right\} = \frac{4}{sh^2 2x}\left(1 + \frac{k^2}{2}\right),$$

где $x = \frac{\pi\beta}{2K}$, членами с k^4 пренебрегли.

Разложение r по k приводит к формуле

$$r = r_0\left(1 + f_0\frac{k^2}{2}\right),$$

где r_0 означает r при $k=0$, т. е.

$$r_0 = a\frac{sh2x}{ch2x - \cos 2y},$$

$$f_0 = \frac{\cos 2y}{2} + \frac{\cos^2 y\left(\frac{1}{ch^2 x} - 1 - \sin^2 y\right)}{1 - \left(\frac{\cos y}{chx}\right)^2}.$$

Потенциал φ может быть представлен в виде

$$\varphi = \varphi_1(x,y,0) + \varphi_2(x,y,0)\frac{k^2}{2},$$

где $\varphi_1(x, y, 0)$ и $\varphi_2(x, y, 0)$ содержат эллиптические функции при $k=0$.

В результате подстановки разложений функций в (12) получаем

$$Q = 4\mathfrak{A}\left\{\int\int \frac{r}{sh^2 2x}\left[\varphi_1 + (2\varphi_1 + f_0 + \varphi_2)\frac{k^2}{2}\right]dxdy\right\} \qquad (13)$$

или

$$Q = Q(0) + \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial k^2}\right)_0 \frac{k^2}{2}.$$

Коэффициенты являются функциями R_{min} и R_{max}.

Таким образом, полный заряд является четной функцией k, что приводит к тому, что максимальный заряд, удерживаемый полем, получается при $k=0$. Отсюда вытекает, что наилучшим полем при данных R_{min} и R_{max} будет магнитное поле с показателем спадания n, близком к 0,5. При отсутствии колебательных движений наилучшим полем является поле с $n=0{,}5$. Но в реальном случае колебания электронов могут привести к резонансу при заполнении камеры зарядом. По этой причине n можно взять несколько отличающимся от 0,5. В обычных бетатронах во избежание больших полей рассеяния n выбирается из инженерных соображений. Для получения больших интенсивностей излучения [4] на первое место выдвигается вопрос об удержании большого заряда, поэтому следует создавать поля с большим зазором с $n \approx 0{,}5$, хотя это и невыгодно с экономической точки зрения.

ЛИТЕРАТУРА

1. П. А. Черданцев. Изв. ТПИ, **87**, 52, 1957.
2. R. Lagrange. Acta Math., **71**, 3, 1939.
3. Н. Н. Лебедев. Techn. Phys. USSR, **4**, 3, 1937.
4. Б. Н. Родимов, П. А. Черданцев, Т. А. Медведева. Изв. вузов, МВО, Физика, **5**, 6, 1959.