ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ
И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА им. С. М. КИРОВА

Том 283 1974

РЕКУРРЕНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В. Е. КОРНИЛОВ

(Представлена кафедрой высшей математики)

В настоящей статье используются известные тождественные преобразования частного двух гипергеометрических рядов для получения рекуррентных соотношений между этими рядами.

Элементарные соотношения получены в общем случае для следующих функций:

$$F(a,b;c;z)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(a)_m(b)_m}{m!\,(c)_m}z^m,\ |z|<1;$$

$$\Phi(a;c;z)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(a)_m}{m!\,(c)_m}z^m,\ |z|<+\infty;$$

$${}_2F_0(a,b;;z)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(a)_m(b)_m}{m!\,z^{-m}},\ |z|\ll 1,$$

где

$$(a)_m=a(a+1)\cdots(a+m-1),\ (a)_0=1.$$

1. Изучим следующую цепную дробь (тождество) ([1], стр. 98; [2], стр. 132)

$$\begin{cases} \dfrac{F(a,b+1;c+1;z)}{F(a,b;c;z)}=\dfrac{1}{1}\,\underset{-}{}\,\dfrac{u_1z}{1}\,\underset{-}{}\,\dfrac{v_1z}{1}\,-\cdots- \\ \dfrac{v_nz\dfrac{F(a+n,b+n+1;c+2n+1;z)}{F(a+n,b+n;c+2n;z)}}{1}, \\ u_j=\dfrac{(a+j-1)(c-b+j-1)}{(c+2j-2)_2},\ v_j=\dfrac{(b+j)(c-a+j)}{(c+2j-1)_2},\ j=1,\cdots,n. \end{cases} \tag{1}$$

Представим правую часть тождества (1) подходящей дробью

$$\frac{F(a,b+1;c+1;z)}{F(a,b;c;z)}=\frac{p_{2n}F_1-v_nzp_{2n-1}F_2}{q_{2n}F_1-v_nzq_{2n-1}F_2}.$$

Из последнего тождества нетрудно получить следующее элементарное соотношение

$$\begin{cases} F(a,b;c;z)=q_{2n}F(a+n,\ b+n;\ c+2n;\ z)- \\ -v_n z q_{2n-1}F(a+n,b+n+1;c+2n+1;z). \end{cases} \tag{2}$$

2. Два предельных случая тождества (1) следующие ([2], стр. 134—137):

$$\begin{cases} \dfrac{\Phi(a+1;c+1;z)}{\Phi(a;c;z)} \equiv \dfrac{1}{1} - \dfrac{a_1 z}{1} - \dfrac{b_1 z}{1} - \cdots - \\ -\dfrac{b_n z\,\Phi(a+n+1;c+2n+1;z)\cdot[\Phi(a+n;c+2n;z)]^{-1}}{1}, \\ a_j=\dfrac{c-a+j-1}{(c+2j-2)_2},\ b_j=-\dfrac{a+j}{(c+2j-1)_2}. \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} \dfrac{{}_2F_0(a,b+1;;z)}{{}_2F_0(a,b;;z)} \equiv \dfrac{1}{1} - \dfrac{c_1 z}{1} - \dfrac{d_1 z}{1} - \cdots - \\ -\dfrac{d_n z\,{}_2F_0(a+n,b+n+1;;z)[{}_2F_0(a+n,b+n;;z)]^{-1}}{1}, \\ c_j=a+j-1,\ d_j=b+j,\ j=1,\cdots,n. \end{cases} \tag{4}$$

3. Аналогично п. 1 получим элементарные соотношения для функций из равенств (3) и (4):

$$\begin{cases} \Phi(a;c;z)=B_{2n}\,\Phi(a+n;c+2n;z)- \\ -b_n z\,B_{2n-1}\Phi(a+n+1;c+2n+1;z). \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} {}_2F_0(a,b;;z)=D_{2n}\,{}_2F_0(a+n,b+n;;z)- \\ -d_n z\,D_{2n-1}\,{}_2F_0(a+n,b+n+1;;z). \end{cases} \tag{6}$$

4. Значения многочленов в равенствах (2), (5), (6) следующие:

$$\begin{cases} q_{2n}=q_{2n+1}+u_{n+1}zq_{2n-1},\quad q_{2n-1}= \\ =\sum\limits_{m=0}^{n-1}\dfrac{(-1)^m C_{n-1}^m z^m}{(c+2n-1-m)_m}\left[\sum\limits_{k=0}^{m}\dfrac{(-1)^k C_m^k(m+1-2n)_k\lambda_m}{(1-n)_k(c)_k[(a)_k(b)_k]^{-1}}\right]. \end{cases} \tag{7}$$

$$\begin{cases} B_{2n-1}=\sum\limits_{m=0}^{n-1}\dfrac{(-1)^m C_{n-1}^m z^m}{(c+2n-1-m)_m}\left[\sum\limits_{k=0}^{m}\dfrac{(-1)^k C_m^k(m+1-2n)_k}{(1-n)_k(c)_k[(a)_k]^{-1}}\right], \\ B_{2n}=\sum\limits_{m=0}^{n}\dfrac{(-1)^m C_n^m z^m}{(c+2n-m)_m}\left[\sum\limits_{k=0}^{m}\dfrac{(-1)^k C_m^k(m-2n)_k}{(-n)_k(c)_k[(a)_k]^{-1}}\right]. \end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{cases} D_{2n}=D_{2n+1}+a_{n+1}zD_{2n-1},\quad D_{2n-1}= \\ =\sum\limits_{m=0}^{n-1}\dfrac{C_{n-1}^m}{z^{-m}}\left[\sum\limits_{k=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]}\dfrac{C_m^k(-1)^k(k-m)_k(a)_k(b)_k}{(1-n)_k[(a+b+n+2k-m)_{m-2k}]^{-1}}\right]. \end{cases} \tag{9}$$

В равенстве (7) коэффициент λ_m следующий:

$$\lambda_m=\sum_{p=0}^{\left[\frac{m-k}{2}\right]}\frac{C_{m-k}^p(-1)^p(m-k-2p+1)_p(a+k)_p(b+k)_p}{(n-k-p)_p[(a+b+n+2k+2p-m)_{m-2p-2k}]^{-1}}. \tag{10}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Бейтмен и А. Эрдейи. Высшие трансцендентные функции. М., Физматгиз, 1965.

2. А. Н. Хованский. Приложение цепных дробей и их обобщений к вопросам приближенного анализа. М., Гостехиздат, 1956.