

УДК 681.5

ВЕРШИННЫЙ АНАЛИЗ КОРНЕВЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ КАЧЕСТВА СИСТЕМЫ С ИНТЕРВАЛЬНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

С.А. Гайворонский

Институт «Кибернетический центр» ТПУ
E-mail: saga@cc.tpu.edu.ru

Рассматривается характеристический полином, коэффициенты которого заданы числовыми интервалами. На основе многопараметрического интервального расширения метода корневого годографа определяются условия принадлежности образов вершин многогранника коэффициентов границам корневых областей. Разрабатывается методика нахождения проверочных вершинных полиномов для анализа минимальной степени устойчивости и максимальной степени колебательности системы с интервальными параметрами.

Введение

В настоящее время в теории автоматического управления активно развивается робастное направление. Одной из актуальных задач робастного управления является оценка качества автоматических систем, в которых некоторые физические параметры не определены точно или могут изменяться по заранее неизвестным законам в определенных пределах. Согласно [1–3], возможный путь ее решения состоит в использовании характеристических полиномов с интервальными коэффициентами, которые находятся по правилам интервальной арифметики. Для анализа системы на основе интервальных характеристических полиномов (ИХП) главным образом применяются алгебраический и частотный подходы и в меньшей мере – корневой метод. Однако известно [4], что робастное расширение корневого метода открывает новые возможности для исследования качества систем с интервальными параметрами.

Выбирая для решения поставленной задачи корневой подход, заметим, что поскольку интервальные коэффициенты имеют фиксированные пределы изменения, то корни ИХП мигрируют по комплексной плоскости, оставаясь локализованными в некоторых замкнутых областях. Если эти области находятся в левой полуплоскости, то по их расположению можно определить диапазоны возможного изменения корневых показателей качества системы – степени устойчивости и степени колебательности. При этом особый интерес представляют их предельные значения – минимальная степень устойчивости и максимальная степень ко-

лебательности. Именно они характеризуют наилучшие режимы работы системы при изменении коэффициентов ее характеристического полинома.

1. Постановка задачи

Пусть ИХП имеет вид

$$D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0, \quad (1)$$

где коэффициенты $a_i, i=\overline{0, n}$ могут изменяться в известных пределах. Образующий этими коэффициентами многогранник P_m является прямоугольным гиперпараллелепипедом с вершинами $V_q, q=\overline{1, 2^m}$. Пусть каждой точке $P_m, m=n+1$, соответствует устойчивый характеристический полином с постоянными коэффициентами и, следовательно, фиксированные корни в левой полуплоскости комплексной плоскости, определяющие степень устойчивости и степень колебательности системы. Необходимо оценить минимальную степень устойчивости и максимальную степень колебательности для заданного многогранника P_m .

Решить данную задачу возможно путем отображения P_m на плоскость корней и нахождения областей локализации корней ИХП. В соответствии с известной реберной теоремой [5] эти области ограничиваются образами ребер P_m . Поэтому одним из способов решения поставленной задачи может быть реберный анализ – отображение ребер P_m . Недостаток такого подхода заключается в значительной трудоемкости отображения всех $(m \cdot 2^{m-1})$ ребер.

Сократить число отображений возможно за счет применения предложенной в [6, 7] реберной

маршрутизации P_m . Она позволяет определить те ребра P_m , которые непосредственно отображаются на границы корневых областей.

Наряду с реберным анализом для оценки локализации корней ИХП применяется также и вершинный анализ. Он основан на проверке расположения корней семейства полиномов, соответствующих вершинам P_m (вершинных полиномов). Так, согласно [1], для решения поставленной задачи необходимо найти образы всех 2^m вершин P_m . Такая процедура также является весьма трудоемкой. Следует заметить, что образы только некоторых вершин принадлежат границам корневых областей (назовем такие вершины граничными). Поэтому для уменьшения вычислительных затрат представляет интерес задача определения граничных вершин.

2. Графический способ определения граничных вершин

Координаты любой точки P_m относительно вершины V_q , $q=1, 2^m$, определяются выражениями

$$a_i = a_i^q + \Delta a_i, \quad i = \overline{0, n}; \quad (2)$$

$$(a_{i\min} - a_i^q) \leq \Delta a_i \leq (a_{i\max} - a_i^q), \quad (3)$$

где Δa_i — приращение i -го интервального коэффициента, a_i^q — его значение в вершине V_q . Верхний предел коэффициента a_i обычно обозначают символом $\bar{a}_i$, а его нижний предел — символом $\underline{a}_i$. Соотношение, связывающее точки P_m с корнями полинома (1), может быть получено подстановкой в (1) выражения (2)

$$D^q(s) + \sum_i \Delta a_i s^i = 0, \quad i = \overline{0, n}, \quad (4)$$

где $D^q(s) = \sum_i a_i^q s^i$ — вершинный полином. Введем

в рассмотрение ребра P_m , которые обозначим R_i^q , где i — индекс интервального коэффициента, q — индекс вершины, из которой по ребру изменяется a_i . На основании (4) запишем уравнение отображения R_i^q на плоскость корней

$$D^q(s) + \Delta a_i s^i = 0. \quad (5)$$

Согласно теории корневого годографа уравнение (5) может быть получено из реберной передаточной функции

$$W_i^q(\Delta a_i, s) = \frac{\Delta a_i s^i}{D^q(s)}. \quad (6)$$

Анализируя (5) и (6), заметим, что при изменении Δa_i в интервале (3) корни движутся от полюсов функции (6), соответствующих одному концу R_i^q , к корням (5) на другом конце R_i^q . При этом они образуют фрагментарные ветви корневого годографа. Назовем их реберными ветвями (обозначим RS_i^q), а их начала и концы — корневыми узлами (U_q).

Исходя из уравнения фаз корневого годографа [8], угол выхода RS_i^q из комплексного корневого узла U_q при увеличении a_i находится по формуле

$$\Theta_i^q = \pi - \sum_{g=1}^n \Theta_g + i\Theta_0, \quad (7)$$

а при уменьшении a_i

$$\Theta_i^q = -\sum_{g=1}^n \Theta_g + i\Theta_0, \quad (8)$$

где Θ_g и Θ_0 — углы между вещественной осью и векторами, направленными из U_q соответственно к g -ому полюсу и к i нулям передаточной функции (6) с координатами $(0; j0)$.

В [6] на основании (7) и (8) получено следующее условие отображения вершины P_m на границу корневой области: U_q будет принадлежать границе области локализации корней, если разница между максимальным и минимальным углами Θ_i^q меньше 180° .

Заметим, что согласно (7) и (8) у всех углов Θ_i^q есть общая составляющая $\sum_{g=1}^n \Theta_g$, которая не влияет на выполнение условия граничного положения U_q . Поэтому перейдем от рассмотрения углов Θ_i^q к рассмотрению углов Φ_i^q , рассчитываемых при увеличении a_i по формуле

$$\Phi_i^q = \pi + i\Theta_0, \quad (9)$$

а при уменьшении a_i — по формуле

$$\Phi_i^q = i\Theta_0. \quad (10)$$

Введем в рассмотрение полярную систему координат с векторами единичного радиуса $\vec{E}_i$, выходящими из начала координат под углами Φ_i^q . Назовем векторы $\vec{E}_i$ коэффициентными векторами. Если задать значение Θ_0 , то согласно (9) и (10) угол вектора для каждого коэффициента легко определяется без вычисления корней соответствующего вершинного полинома. Очевидно, что по взаимному расположению $\vec{E}_i$ можно судить о характере узла U_q . Он будет принадлежать границе корневой области, если векторы $\vec{E}_i$ всех интервальных коэффициентов будут располагаться в угле, меньшем 180° .

Наиболее просто и наглядно проверить выполнение этого условия можно графическим способом, строя $\vec{E}_i$ на круговой диаграмме. На рис. 1 на примере ИХП с четырьмя интервальными коэффициентами представлено возможное расположение $\vec{E}_i$ для случая граничной вершины. Сплошной линией на рисунке показаны векторы при максимальном значении интервального коэффициента в узле U_q , а прерывистой — при его минимальном значении.

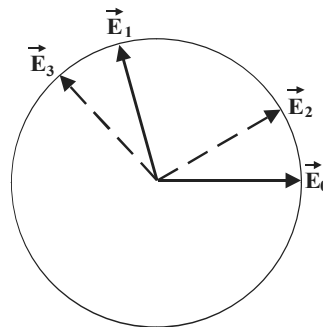
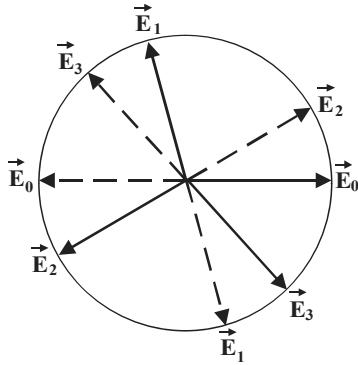


Рис. 1. Коэффициентные векторы граничной вершины

Заметим, что изменение предела коэффициента с минимального на максимальный или наоборот позволяет поворачивать соответствующий вектор на 180° . Это дает возможность располагать векторы желаемым образом (в соответствии с условием граничности корневого узла). Получающиеся пределы коэффициентов ИХП будут определять координаты граничной вершины P_m .

На основании анализа возможного расположения $\vec{E}_i$ можно сделать следующий вывод: если для каждого из m коэффициентов ИХП построить на круговой диаграмме в соответствии с (9) и (10) два противоположных вектора (рис. 2), то любые m последовательно расположенных векторов будут лежать в угле, меньшем π , и, следовательно, определять координаты граничной вершины P_m . Задавая направление вращения и выбирая в качестве начального каждый из $2m$ векторов, можно получить набор из $2m$ возможных граничных вершин P_m .



3. Из каждого сектора произвольно задать по одному значению угла Θ_0 .
4. Для минимального Θ_0 на круговой диаграмме для всех интервальных коэффициентов ИХП с обоими пределами построить векторы под углами, рассматриваемыми по формулам (9) и (10).
5. Начиная с любого коэффициентного вектора, выбрать m векторов, расположенных последовательно в положительном направлении (против часовой стрелки) и определить координаты соответствующей векторам граничной вершины P_m .
6. Последовательно изменяя начальные векторы, повторить процедуру п. 4 и получить координаты $2m$ граничных вершин P_m .
7. Повторить действия пп. 3–5 для возрастающих значений выбранных в п. 2 углов Θ_0 . При каждом последующем угле Θ_0 из получающихся наборов граничных вершин выбирать новые вершины и добавлять их к найденным ранее.

5. Пример

Пусть система имеет характеристический полином $D(s) = a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0$, где $a_3 = [1; 1,2]$, $a_2 = [12; 12,2]$, $a_1 = [22; 23,2]$, $a_0 = [20; 25,5]$. Требуется определить минимальную степень устойчивости и максимальную степень колебательности интервальной системы.

Для решения этой задачи вначале было установлено, что заданный ИХП робастно устойчив. Далее согласно разработанной методике найден один особый луч с углом $\varphi_3 = 120^\circ$. Он разделяет второй квадрант на два сектора, из которых выбраны два угла: $\Theta_0 = 150^\circ$ и $\Theta_0 = 100^\circ$. Для первого угла построена круговая диаграмма коэффициентных векторов и определен следующий набор граничных вершин

$$\begin{array}{cccc} \overline{a_3}, \overline{a_2}, \overline{a_1}, \overline{a_0}; & \overline{a_3}, \overline{a_2}, \overline{a_1}, \overline{a_0}; & \overline{a_3}, \overline{a_2}, \overline{a_1}, \overline{a_0}; & \overline{a_3}, \overline{a_2}, \overline{a_1}, \overline{a_0}; \\ \overline{a_3}, \overline{a_2}, \overline{a_1}, \overline{a_0}; & \overline{a_3}, \overline{a_2}, \overline{a_1}, \overline{a_0}; & \overline{a_3}, \overline{a_2}, \overline{a_1}, \overline{a_0}; & \overline{a_3}, \overline{a_2}, \overline{a_1}, \overline{a_0}. \end{array}$$

При $\Theta_0 = 100^\circ$ по второй диаграмме векторов дополнительно найдены еще две граничные вершины

$$\begin{array}{c} \overline{a_3}, \overline{a_2}, \overline{a_1}, \overline{a_0}; \\ \overline{a_3}, \overline{a_2}, \overline{a_1}, \overline{a_0}. \end{array}$$

Для каждого полученного набора коэффициентов определены корни соответствующих полиномов. В результате анализа корней установлено, что рассматриваемая система имеет минимальную степень устойчивости $\alpha_{\min} = 0,95$ в вершине $\overline{a_3}, \overline{a_2}, \overline{a_1}, \overline{a_0}$ и максимальную степень колебательности $\mu_{\max} = 1,37$ в вершине $\overline{a_3}, \overline{a_2}, \overline{a_1}, \overline{a_0}$.

Заключение

Для оценки корневых показателей качества системы с интервальным характеристическим полиномом разработана методика определения граничных вершин многогранника интервальных коэффициентов. Образы этих вершин принадлежат границам областей локализации корней интервального полинома и определяют минимальную степень устойчивости и максимальную степень колебательности системы. Применение разработанной методики позволяет сократить число проверяемых вершин и, следовательно, упростить процедуру анализа. В основу методики выбора граничных вершин положены фазовые соотношения известного метода корневого годографа. Предложенный графический способ определения координат граничных вершин отличается простотой и наглядностью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гусев Ю.М., Ефанов В.Н., Крымский В.Г., Рутковский В.Ю. Анализ и синтез линейных интервальных динамических систем (состояние проблемы). Анализ с использованием интервальных характеристических полиномов // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. — 1991. — № 1. — С. 3–23.
2. Поляк Б.Т., Щербаков П.С. Робастная устойчивость и управление. — М.: Наука, 2002. — 303 с.
3. Жабко А.П., Харитонов В.Л. Необходимые и достаточные условия устойчивости линейного семейства полиномов // Автоматика и телемеханика. — 1994. — № 10. — С. 125–134.
4. Римский Г.В. Корневой метод решения задач устойчивости интервальных систем // Весті АН Беларусі. Сер. фіз.-техн. наук. — 1994. — № 4. — С. 80–85.
5. Bartlett A.C., Hollot C.V., Lin H. Root location of an entire polytope polynomials: it suffices to check the edges // Math. Contr., Signals. Syst., Proc. Amer. Conf. — Minneapolis: MN, 1987. — P. 61–71.
6. Вадутов О.С., Гайворонский С.А. Применение реберной маршрутизации для анализа устойчивости интервальных полиномов // Известия РАН. Теория и системы управления. — 2003. — № 6. — С. 7–12.
7. Гайворонский С.А. Определение реберного маршрута для анализа робастной секторной устойчивости интервального полинома // Известия РАН. Теория и системы управления. — 2005. — № 5. — С. 11–15.
8. Удерман Э.Г. Метод корневого годографа в теории автоматического управления. — М.: Наука, 1972. — 448 с.