

## ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДЛИННЫХ УПРУГИХ КАНАТОВ В СИСТЕМАХ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

В. А. БЕЙНАРОВИЧ, А. Г. БОРОДИН, А. Д. КОЖУХОВСКИЙ,  
С. А. КОПАНЕВ, Л. С. УДУТ

(Представлена научно-техническим семинаром НИИ АЭМ)

В ряде промышленных и специальных установок, имеющих системы автоматического регулирования и управления, используются гибкие упругие канаты большой длины, являющиеся объектами регулирования или входящие в систему регулирования как один из элементов объекта регулирования (рабочей машины). К таким установкам относятся шахтный подъем, подвесные канатные дороги, буксирные тросовые устройства, сверхдлинноволновые антенные устройства, канатные бревнотаски и другие. При проектировании систем автоматического регулирования (САР), содержащих гибкие упругие канаты большой длины, возникает необходимость представления последних в виде динамических звеньев, включенных определенным образом в структурную схему замкнутой САР. В настоящей статье рассматривается задача представления гибкого упругого весомого вертикально расположенного каната большой длины в виде динамического звена САР.

Рассмотрим случай, когда при закрепленном верхнем конце каната усилие натяжения каната регулируется за счет изменения длины каната путем наматывания или сматывания части каната на барабан лебедки. В рассматриваемой задаче (рис. 1, а) гибкий однородный вертикально расположенный канат диаметром  $d$  и длиной  $l$  находится под воздействием двух растягивающих сил, приложенных к верхнему ( $T_v$ ) и нижнему ( $T_n$ ) концам каната. В установившемся состоянии (в статике) очевидно, что в верхней точке каната сила натяжения  $T_v$  равна сумме силы  $T_n$  и веса каната  $Q$ . Таким образом, для вертикального однородного гибкого каната с постоянным диаметром и известным весом  $Q$  статические усилия натяжения в любой точке однозначно зависят от ее расстояния от конца каната и величины силы натяжения  $T_n$  в нижней точке.

Статическими характеристиками каната как звена системы регулирования будем считать зависимость приращения величины усилия натяжения  $T_n$  в нижней точке от удлинения каната при закрепленном верхнем конце каната. По закону Гука [1] полное удлинение каната определяется

$$\Delta l = \frac{\Delta T_n l}{EF} + \frac{\gamma l^2}{2E} = \Delta l_T + \Delta l_Q, \quad (1)$$

где  $E$  — модуль упругости каната;  
 $F$  — площадь поперечного сечения каната;  
 $\gamma$  — удельный вес каната;

$\Delta l_T$  — упругая деформация каната под действием усилия  $T_H$ ;  
 $\Delta l_Q$  — удлинение каната под действием силы тяжести каната.

Из (1) следует, что статический коэффициент передачи нелинейно зависит от длины каната и определяется выражением

$$K_{ор} = \frac{\Delta T_H}{\Delta l_T} = \frac{EF}{l}. \quad (2)$$

Таким образом, в системах регулирования усилия натяжения за счет изменения длины каната при закрепленном верхнем конце статический коэффициент изменяется обратно пропорционально длине каната и при уменьшении длины  $l$  до нуля величина  $K_{ор}$  стремится к бесконечности. Это следует учитывать при разработке САР натяжения канатов посредством лебедок, применяя структуры, обеспечивающие динамическую устойчивость САР при сколь угодно большом коэффициенте передачи объекта регулирования. На рис. 1, б приведена зависимость статического коэффициента передачи для стального каната с диаметром 4,7 мм и погонным весом 87,7 кг/км в диапазоне изменения длины от 1 до 4 км.

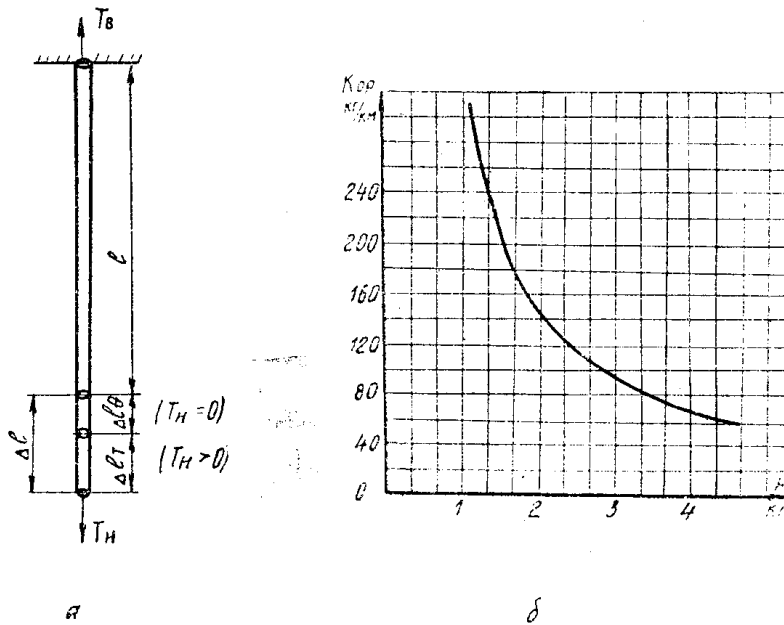


Рис. 1.

Для определения динамических характеристик длинного упругого вертикально расположенного каната воспользуемся теорией колебательных систем с распределенными параметрами, рассматривая собственные продольные колебания каната при условии, что сила трения, вызывающая затухание колебаний, пропорциональна скорости смещения бесконечно малого элемента каната. Уравнение свободных продольных колебаний каната с учетом затухания колебаний имеет вид [2, 3]

$$m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + k \frac{\partial u}{\partial t} - EF \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (3)$$

где  $m$  — масса каната;

$k$  — коэффициент затухания;

$u$  — абсолютное удлинение каната на рассматриваемой длине  $x$ ;

$x$  — рассматриваемая длина каната, отсчитываемая от верхней точки (рис. 1, а), принимаемой за начало координат ( $0 \leq x \leq l$ );  
 $t$  — текущее время.

Задача определения динамических свойств каната как элемента САР сводится к нахождению временной функции усилия натяжения при заданной временной функции изменения длины каната.

При нулевых начальных условиях краевые условия для уравнения (3) запишутся [7]:

$$\left. \begin{aligned} EF \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{x=l} &= T_H(t); \\ u(x, t) \Big|_{x=0} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

С учетом нулевых начальных условий уравнение колебаний (3) в операторной форме запишется [7]:

$$\frac{\partial^2 U(x, p)}{\partial x^2} - \frac{p}{a^2} (p + 2h) U(x, p) = 0, \quad (5)$$

где  $p$  — оператор Лапласа;

$U$  — операторное изображение удлинения;

$$2h = \frac{k}{m}; \quad a^2 = \frac{EF}{m}.$$

Уравнение (5) имеет следующее решение в общем виде [7]:

$$U(x, p) = C_1 \operatorname{ch}(x \sqrt{b}) + C_2 \operatorname{sh}(x \sqrt{b}), \quad (6)$$

где

$$b = \frac{p}{a^2} (p + 2h).$$

Используя краевые условия (4), определяем постоянные интегрирования в уравнении (6)

$$C_1 = 0; \quad C_2 = \frac{T_H(p)}{EF \sqrt{b} \operatorname{ch}(l \sqrt{b})}, \quad (7)$$

С учетом (7) решение (6) запишется

$$U(x, p) = \frac{T_H(p) \cdot \operatorname{sh}(x \sqrt{b})}{EF \sqrt{b} \operatorname{ch}(l \sqrt{b})}. \quad (8)$$

При значении  $x=l$  функция  $U(x, p)$  будет выражать собой удлинение каната  $\Delta l(p)$ . Приняв  $\Delta l(p)$  в качестве входного управляющего сигнала, получим передаточную функцию упругого каната длиной  $x=l$  по управляющему воздействию в виде

$$W_y(p) = \frac{\Delta T_H(p)}{\Delta l(p)} = \frac{EF \sqrt{b} \operatorname{ch}(l \sqrt{b})}{\operatorname{sh}(l \sqrt{b})}. \quad (9)$$

Для упрощения расчетов в выражении (9) гиперболические функции могут быть разложены в степенные ряды [7] и с учетом первых трех членов разложения представлены в виде

$$\operatorname{ch} \sqrt{b} l^2 \approx 1 + \frac{b l^2}{2} + \frac{b^2 l^4}{24}; \quad (10)$$

$$\operatorname{sh} \sqrt{b} l^2 \approx \sqrt{b} l^2 \left( 1 + \frac{b l^2}{6} + \frac{b^2 l^4}{120} \right). \quad (11)$$

Тогда передаточная функция (9) с учетом (10) и (11) примет упрощенное выражение

$$W_{yy}(p) = 5 \cdot K_{op} \frac{l^4 p^4 + 4hl^4 p^3 + (12l^2 a^2 + 4h^2 l^4) p^2 + 24hl^2 a^2 p + 24a^4}{l^4 p^4 + 4hl^4 p^3 + (20l^2 \cdot a^2 + 4h^2 l^4) p^2 + 40hl^2 a^2 p + 120a^4} \cdot \quad (12)$$

Динамические свойства длинного упругого каната по передаче возмущений в виде приращения усилия натяжения  $\Delta T_B$  в верхней точке оцениваются на любом отрезке каната длиной  $0 \leq x \leq l$  отношением приращения усилия натяжения  $\Delta T$  в рассматриваемом сечении, расположенном на расстоянии  $x$  от конца каната к приращению усилия  $\Delta T_B$  в верхней точке закрепления каната. Между относительным удлинением каната  $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$  и натяжением  $T(x,t)$  существует зависимость [4]:

$$T(x,t) = EF \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}, \quad (13)$$

где  $EF$  — продольная жесткость каната.

Тогда с учетом выражений (8) и (13) передаточная функция упругого каната с длиной  $x=l$  по возмущающему воздействию принимает следующий вид:

$$W_b(p) = \frac{\Delta T_H(p)}{\Delta T_B(p)} = \frac{1}{\text{ch}(\sqrt{l}b)}. \quad (14)$$

Проверка полученных расчетных выражений производилась на экспериментальной установке с канатом диаметром 8 мм, длиной 3,75 м, погонным весом 0,07 кг/м, модулем Юнга 78 кг/см<sup>2</sup>, коэффициентом затухания 0,0364 сек, коэффициентом передачи 10,4 кг/м. Расчет переходного процесса изменения усилия натяжения при скачкообразном удлинении каната на величину  $\Delta l_T = 0,04$  м был произведен по упрощенному выражению (12) передаточной функции каната, имеющему для указанных параметров следующий вид:

$$W_{yy}(p) = 52 \frac{p^4 + 2,72p^3 + 127,8p^2 + 172,5p + 2668,1}{p^4 + 2,72p^3 + 213p^2 + 287,5p + 13340,5} \cdot \quad (15)$$

На рис. 2 приведены кривые переходного процесса, полученные экспериментальным путем (осциллографированием) — сплошная кривая 1 и расчетным путем, по выражению (15) — пунктирная кривая 2.

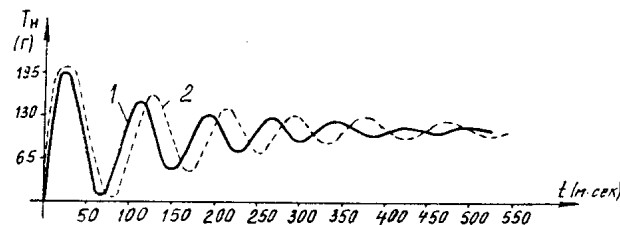


Рис. 2.

Для решения уравнения (15) использовалась АВМ по схеме, представленной на рис. 3.

Сравнение расчетной и экспериментальной кривых переходного процесса показывает их близкое совпадение (расхождение по фазе вызвано неточностью определения коэффициента затухания каната), что оз-

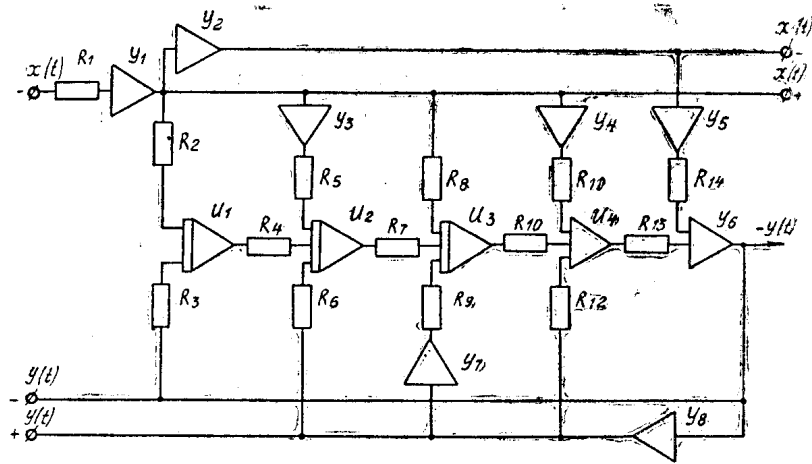


Рис. 3.

начает практическую пригодность полученных расчетных выражений для проектирования различных систем регулирования, содержащих гибкие упругие весомые вертикально расположенные канаты.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Н. М. Беляев. Сопротивление материалов. М., ГИФМЛ, 1959.
2. С. П. Стрелков. Введение в теорию колебаний. М., «Наука», 1964.
3. С. П. Тимошенко. Колебания в инженерном деле. М., ГИФМЛ, 1959.
4. Г. Н. Савин и О. А. Горошко. Динамика нити переменной длины (применительно к шахтным подъемам). Киев, изд-во АН УССР, 1962.
5. Е. В. Александров, В. Б. Соколинский. Прикладная теория и расчеты ударных систем. М., «Наука», 1969.
6. В. М. Терехов. Учет упругости длинных канатов в динамике электропривода подъемников. «Электричество», «Энергия», 1966, № 11.
7. А. Ф. Верлань, В. Ф. Евдокимов. Электронное моделирование передаточных функций. Киев, «Техника», 1971.