6. Пат. 2229139 РФ. МКИ G01R 23/16. Способ спектрального анализа сложных несинусоидальных периодических сигналов представленных цифровыми отсчетами / В.С. Аврамчук, Е.И. Гольдштейн. Заявлено 10.12.02; Опубл. 20.05.2004, Бюл. № 14. – 10 с.: ил.
7. Пат. 2229140 РФ. МКИ G01R 23/16. Способ спектрального анализа многочастотных периодических сигналов, представленных цифровыми отсчетами / В.С. Аврамчук, Е.И. Гольдштейн. Заявлено 28.03.03; Опубл. 20.05.2004, Бюл. № 14. – 7 с.: ил.
8. Пат. 2231076 РФ. МКИ G01R 23/16. Способ определения частоты сетевого напряжения / В.С. Аврамчук, Е.И. Гольдштейн. Заявлено 02.07.03; Опубл. 20.06.2004, Бюл. № 15. – 7 с.: ил.

УДК 681.5.01

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ МЕТОДОМ ИЗОБРАЖАЮЩИХ ВЕКТОРОВ

Ю.Н. Шалаев

Институт «Кибернетический центр» ТПУ
E-mail: shal@ad.cctpu.edu.ru

Проводится в векторно-матричной форме синтез управляющего сигнала нестационарных динамических систем по желаемой характеристике выходного сигнала и предложен алгоритм оценки их параметров методом изображающих векторов. Это операторный метод, который всякой временной функции на конечном промежутке времени ставит в соответствие n-мерный вектор, а линейному оператору – матрицу (n×n). Дальнейшие преобразования, необходимые для оценки параметров и управления системы, ведутся численными методами. Все это позволяет успешно использовать вычислительную технику, а окончательный результат на основании формулы обращения записывать в аналоговой форме.

Современные технологические процессы и производства характеризуются многофакторностью и сложными зависимостями между параметрами. И поэтому широкое распространение систем с переменными параметрами в области автоматического управления, в информационно-измерительных системах, а также необходимость более глубокого количественного и качественного изучения процессов, протекающих в таких системах, приводит к интенсивной разработке цифровых методов синтеза и анализа подобных систем и объектов.

Качество управления объектами в динамике определяется многими факторами. Это наличие возмущений и их характер, тип объекта – стационарный, нестационарный, линейный, нелинейный. Тем не менее, доминирующим фактором, во многом определяющим эффективность решения задачи управления, является положенная в основу исследования математическая модель исследуемого объекта или процесса. Для решения задачи управления и идентификации нестационарными объектами использован метод изображающих векторов [1–3], который сочетает в себе как цифровые, так и аналитические приемы решения поставленной задачи.

Суть метода изображающих векторов состоит в том, что каждой функции $f(t)$ ставится в однозначное соответствие вектор $F=\{f_1,f_2,...,f_p\}$. Для функции $f(t)$, определенной на промежутке времени $[0,\ t_0]$, имеет место разложение

$$f(\tau)=\sum_{k=0}^{n} f_k T_k(\tau), \qquad (1)$$

где f_k – коэффициенты Фурье; $T_k(\tau)$ – ортонормированные смещенные полиномы Чебышева I-го рода; $\tau=t/t_0$ – безразмерная независимая переменная.

Приведем некоторые свойства метода изображающих векторов. Операции интегрирования функции $f(\tau)$ соответствует в области изображающих векторов умножению ее изображающего вектора на матрицу интегрирования:

$$Y=IF+y(0)e_1/T_0(\tau), \qquad (2)$$

где I – матрица интегрирования, $y(0)$ – начальные условия, e_1 – единичный вектор, $T_0(\tau)$ – полином Чебышева.

Для многократного интегрирования при нулевых начальных условиях матрица интегрирования возводится в соответствующую степень:

$$Y=I^kF.$$

Аналогичное положение имеет место и для матрицы дифференцирования D [1].

Произведению двух функций

$$h(\tau)=z(\tau)f(\tau)$$

в области изображающих векторов соответствует соотношение вида

$$H=Z(J)F, \qquad (3)$$

где J – матрица Якоби [1].

Таким образом, изображение произведения двух функций равно произведению изображений матрицы известной функции $z(\tau)$ на изображающий вектор другой. Изображающей матрицей условно названа матричная функция $Z(J)$, которая получается из заданной функции $z(\tau)$ заменой скалярного аргумента τ на матрицу J. Ввиду равнозначности двух функций их произведение коммутативно, т. е. равно произведению матрицы второй функции на изображающий вектор первой. Тогда выражение (3) запишется как

$$H = Q^T \mathrm{diag}[z(\tau_1), z(\tau_2), ..., z(\tau_p)]QF, \qquad (4)$$

где Q – интерполяционная матрица [1], составленная из значений базовых полиномов в узлах интерполирования, p – размерность интерполяционной матрицы Q, $z(\tau_k)$ – значения функции $z(\tau)$ в нулях p-го полинома Чебышева. Для учета интервала разложения матрица Якоби J умножается скалярно на величину t_0. Восстанавливается исходная функция времени $f(\tau)$ по изображающему вектору в соответствии с формулой обращения

$$f(\tau) = (F, T(\tau)), \qquad (5)$$

где правая часть имеет смысл скалярного произведения изображающего вектора на переменный вектор полиномов Чебышева $T(\tau)$.

При описании объекта управления в виде передаточной функции уравнение, связывающее выходной сигнал $y(t)$ и сигнал управления $u(t)$ в операторной форме, запишется как

$$Y = W(s)U, \qquad (6)$$

где $W(s)$ – передаточная функция объекта управления.

Изображающий вектор выходного сигнала $y(t)$ на интервале $[0, t_0]$ (6) можно записать согласно соотношениям (1, 2) как

$$Y = (t_0 I)W(t_0 I)U. \qquad (7)$$

Разрешая соотношение (7) относительно вектора управляющего сигнала, получим

$$U = W(t_0 I)^{-1}(t_0 I)Y. \qquad (8)$$

Для матрицы дифференцирования выражение (6) запишется как

$$U = W(D)Y. \qquad (9)$$

Выходной сигнал $y(t)$ можно задать в виде произвольной функции перемещения объекта управления по заданным координатам. Для получения изображающего вектора произвольного выходного сигнала Y на интервале времени $[0, t_0]$ воспользуемся соотношением перехода от точечного изображающего вектора к изображающему вектору Y следующего вида

$$Y = 2/pQ^T Y(\tau_k), \qquad (10)$$

где $Y(\tau_k)=\{y(\tau_k)\}$ – точечный изображающий вектор, представляющий собой вектор, элементы которого есть значения функции $y(t)$ в нулях первого из отброшенных полиномов Чебышева. С учетом точечного изображающего вектора (10) соотношения (8, 9) запишутся как

$$U = 2/pW(t_0 I)^{-1}Q^T Y(\tau_k),$$

$$U = 2/pW(D)Q^T Y(\tau_k).$$

Рассмотрим динамическую систему, которая описывается дифференциальным уравнением вида

$$A_0(t)Y^{(n)}(t) + A_1(t)Y^{(n-1)}(t) + \ldots +$$

$$+A_{(n-1)}(t)Y'(t) + A_n(t)Y(t) = U, \qquad (11)$$

где $A_i(t)$, $i=\overline{0,n}$ – переменные коэффициенты, непрерывные на интервале $[0, t_0]$.

На основании правил перехода к изображающим векторам (1–4) дифференциальное уравнение (6) запишется следующим образом

$$[A_0(J)D^n + A_1(J)D^{n-1} + \ldots + A_{n-1}(J)D + A_n(J)] = U$$

или $$G[A(J), D(J)]Y = U. \qquad (12)$$

При расчете реакции динамических нелинейных нестационарных систем управления на управляющее воздействие заданные нелинейные коэффициенты по методу изображающих векторов переводят в точечные изображающие векторы. Таким образом, имея значения неизвестной функции в определенных точках, узлах интерполирования, можно провести определенную нелинейную операцию над этими точками, например: операцию вычисления модуля функции; нелинейностей, заданных в виде графика насыщения; различных тригонометрических и степенных зависимостей в этих точках. Далее полученный преобразованный точечный изображающий вектор переводят в изображающий вектор соответствующей нелинейной операции.

Рассмотрим систему, которая описывается нелинейным дифференциальным уравнением следующего вида:

$$F(t, y) + L\{(t, y)\} = U, \qquad (13)$$

где левая часть уравнения (13) состоит из линейной части $F(t,y)$ и нелинейной $L(t,y)$.

По методу изображающих векторов рассмотрим вычисление неизвестной функции $y(t)$ при действии нелинейного оператора L. Переходим к точечным изображающим векторам, тогда нелинейная часть соотношения (13) запишется как

$$R\{L(y(\tau_k)\} = Q^T \mathrm{diag}[Ly(\tau_k)]Q,$$

где R – оператор перехода от точечных изображающих векторов функций, стоящих под знаком оператора, к изображающим векторам этих функций.

В векторно-матричной форме соотношение (13) запишется в следующем виде

$$F(J, Y) + Q^T \mathrm{diag}[LY_k]Q = U.$$

Восстанавливается управляющая функция времени $U(t)$ по изображающему вектору (8, 9, 12, 13) и в соответствии с формулой обращения

$$U(\tau) = (U, T(\tau)), \qquad (14)$$

Таким образом, при описании объектов управления различными методами (передаточная функция или соответствующее дифференциальное уравнение) можно получить вектор управляющего сигнала в зависимости его от выходного сигнала Y, преобразовать по соотношению (14) и подать на вход системы сигнал в аналоговой форме.

Задача оценки параметров динамической системы сводится к нахождению:

- формальной структуры модели;

- конструктивных параметров объекта управления;
- неизвестных параметров модели системы управления.

Динамику системы управления успешно описывают с помощью дифференциальных и интегральных уравнений [4]

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^{i-n}}{dt^{i-n}} y(t) = \sum_{j=0}^{m} b_j \frac{d^{j-m}}{dt^{j-m}} u(t), \qquad (15)$$

Формальная структура системы управления на основании многих источников определена в виде дифференциального уравнения (15). Оператор идентификации объекта управления запишем в виде передаточной функции

$$W(s) = \frac{B(s)}{A(s)}. \qquad (16)$$

Таким образом, задача оценки параметров передаточной функции по виду переходного процесса системы управления $h(t)$ сводится к оценке конструктивных параметров передаточной функции (16), при этом $m<n$, и нахождению неизвестных параметров модели $a_i(i=\overline{0,n-1})$ и $b_j(j=\overline{0,m})$.

Для решения поставленной задачи воспользуемся методом изображающих векторов, для этого переходной процесс $h(t)$ преобразуем в изображающий вектор по соотношениям (1, 2):

$$H = \{h_1, h_2, \ldots, h_p\}. \qquad (17)$$

По вектору (17) и из формулы обращения (5) получаем аналитическую зависимость переходного процесса в виде полинома порядка p:

$$h(t) = (H, T(t)). \qquad (18)$$

По аналитической зависимости (18) функции $h(t)$ находим время переходного процесса t_0 от момента включения системы до момента, когда модуль отклонения переходного процесса от установившегося значения не превосходит заданной величины зоны нечувствительности.

Для нахождения весовой функции системы $w(t)$ воспользуемся дифференциальной связью между весовой и переходной функциями

$$w(t) = \frac{d}{dt} h(t). \qquad (19)$$

В области изображающих векторов соотношение (19) запишется как

$$w = DH.$$

По соотношению (5) получили аналитический вид весовой функции

$$w(t) = (w, T(t)).$$

Для оценки нулей передаточной функции вводится постоянный коэффициент $c>1$ и на интервале от 0 до t_0 по соотношению $w(t)w(ct)<0$ оценивается порядок числителя передаточной функции (16), т. е. количество подынтервалов, на которых находятся нули весовой функции $w(t)$.

По весовой функции (19) получаем числовую характеристику передаточной функции, для этого воспользуемся интегральным преобразованием Лапласа

$$W(g_i) = \int_0^{\infty} w(t) \exp(-g_i t) dt, \qquad (20)$$

где g_i – вещественный параметр на интервале $[0, t_0]$; $W(g_i)$– оператор системы управления.

Оператор системы управления (15) для вещественной переменной g запишется как

$$W(g) = \frac{b_m g^m + b_{m-1} g^{m-1} + \ldots + b_1 g + b_0}{g^n + a_{n-1} g^{n-1} + \ldots + a_1 g + a_0}. \qquad (21)$$

Для оценки конструктивных параметров n, m воспользуемся уравнениями (20, 21) и предельным соотношением

$$\lim_{g\to\infty} \frac{W(g)}{W(cg)} = c^{n-m}. \qquad (22)$$

Из полученного соотношения (22) находится оценка конструктивных параметров

$$\widehat{n-m} = \frac{\ln c^{n-m}}{\ln c}.$$

В результате введенных допущений при оценке параметров n, m получается вещественное число, содержащее целую часть и мантиссу. Мантиссу полученного выражения принимаем за единицу и прибавляем к целой части. Таким образом, задача нахождения конструктивных параметров n, m решена.

Для нахождения коэффициентов передаточной функции необходимо решить систему линейных алгебраических уравнений порядка $n+m+1$ следующего вида:

$$g_k^n W(g_k) + W(g_k) \sum_{i=0}^{n-1} a_i g_k^i - \sum_{j=0}^{m} b_j g_k^j = 0,$$
$$k = \overline{0, n+m+1}.$$

По найденным коэффициентам a_j, b_j и конструктивным параметрам n и m записываем передаточную функцию исследуемой системы.

Необходимо отметить, что переходной процесс (17) может быть на выходе нестационарной и нелинейной динамических систем. Изложенный метод оценки параметров динамических систем позволяет аппроксимировать эти системы передаточными функциями линейных динамических систем.

Предложенный метод моделирования нестационарных систем управления позволяет получить сигнал управления в зависимости от выходного сигнала Y и для исследуемой (идентифицируемой) системы управления. Действительно, по полученной передаточной функции идентифицируемой системы по соотношениям (8) или (9) и (14) получаем управляющий сигнал $U(\tau)$, который и можно подать на вход исследуемой системы управления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Осипов В.М. Основы метода изображающих векторов и линейное преобразование сигналов // В сб.: Вопросы программирования и автоматизации проектирования. – Вып. 1. – Томск: Изд-во Томского ун-та, 1971. – С. 1–13.
2. Осипов В.М., Шалаев Ю.Н. Решение линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами на АВМ методом изображающих векторов // Известия вузов. Приборостроение. – 1977. – № 12. – С. 43–47.
3. Шалаев Ю.Н. Применение метода изображающих векторов к решению краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений // В сб.: Автоматизация управления и АСУ ТП. – Томск: Изд-во ТПУ, 1977. – С. 101–105.
4. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического регулирования. – М.: Наука, 1972. – 768 с.

УДК 539.12.01

МЕДЛЕННОЕ ВРАЩЕНИЕ МАССИВНЫХ ТЕЛ В ТЕОРИИ ТЯГОТЕНИЯ ИОРДАНА-БРАНСА-ДИККЕ

В.И. Рейзлин

Институт «Кибернетический центр» ТПУ
E-mail: valera@ad.cctpu.edu.ru

Рассматривается задача о медленном вращении релятивистских тел в скалярно-тензорной теории тяготения. В первом приближении по угловой скорости получено уравнение, описывающее вращение, его внешнее решение и выражение для момента импульса. Приведены результаты численного интегрирования этих уравнений. В расчетах применялось уравнение состояния нейтронно-звездной материи в модели однобозонного обмена. Полученные результаты сравниваются с данными наблюдений пульсаров.

Проблеме вращающихся тел в рамках общей теории относительности (ОТО) посвящен ряд работ [1–5]. В [1] было найдено точное решение уравнений Эйнштейна для стационарного аксиально-симметричного гравитационного поля в вакууме. В [2–5] рассматривалось приближенное общее решение, описывающее поле медленно вращающегося тела.

Представляет интерес рассмотрение данного вопроса с точки зрения альтернативных теорий гравитации. Одной из них является скалярно-тензорная теория Иордана-Бранса-Дикке [6–8]. Задача вращения тел в этой теории рассмотрена в работе [9]. Настоящая статья посвящена данному вопросу и ограничивается моделью медленного вращения, при котором угловая скорость ω удовлетворяет условиям:

$$\omega r << 1, \quad \omega^2 << M / r^3. \tag{1}$$

Первое из них означает, что линейная скорость любого элемента тела много меньше скорости света c, а второе – малость центробежных сил по сравнению с силами тяготения. В (1) M – масса тела, r – радиальная координата; здесь и далее используются единицы c=G=1, G – гравитационная постоянная.

Уравнения поля в скалярно-тензорной теории тяготения имеют следующий вид [6–8]:

$$G_{\mu\nu} = -8\pi\psi^{-1}T_{\mu\nu} - \sigma\psi^{-2}(\psi_{;\mu}\psi_{;\nu} - 1/2\cdot g_{\mu\nu}\psi_{;\rho}\psi^{;\rho}) - \\ -\psi^{-1}(\psi_{;\mu;\nu} - g_{\mu\nu}\psi^{;\rho}{}_{;\rho}), \tag{2}$$

$$\psi^{;\rho}{}_{;\rho} = 8\pi(3+2\sigma)^{-1}T^{\mu}_{\mu}, \tag{3}$$

где ψ – дальнодействующее скалярное поле; σ – безразмерная константа связи ψ-поля; $g_{\mu\nu}$ – метрический тензор; $G_{\mu\nu}$ – тензор Эйнштейна; $T_{\mu\nu}$ – тензор энергии-импульса материи, выражающийся через давление P и плотность вещества ρ следующим образом:

$$T_{\mu\nu} = (P+\rho)u_\mu u_\nu - Pg_{\mu\nu}. \tag{4}$$

Здесь $u_\mu = ds/dx^\mu$ – четырёхскорость, ds – интервал, $u_\mu u^\mu = 1$.

Теория Иордана-Бранса-Дикке переходит в ОТО в предельном случае $\sigma \to \infty$, ψ=1. Радиоастрономические измерения устанавливают ограничение σ>15 [10].

В первом порядке разложения метрических коэффициентов по степеням ω квадрат интервала можно записать в виде [3, 9]:

$$ds^2 = B(r)dt^2 - A(r)dr^2 - \\ -r^2[d\theta^2 + \sin^2\theta(d\varphi - \Omega(r,\theta)dt)^2], \tag{5}$$

где $B(r)$, $A(r)$ – метрические коэффициенты, θ – долгота, φ – широта; функция Ω описывает «увлечение» инерциальной системы отсчета телом и возникает вследствие вращения конфигурации. В работе [9] показано, что в рассматриваемом приближении функция Ω не зависит от долготы θ. Уравнения (2-4) являются тогда уравнениями гидростатического равновесия [11], которые определяют в требуемом приближении функции A, B, ρ, P, ψ и другие четные по ω параметры системы. После нахождения этих параметров для определения линейной по ω функции Ω достаточно решить единственное неисчезающее недиагональное ($t\varphi$)-уравнение в системе (2), записанное в первом порядке по ω [9]:

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{\psi r^4}{\sqrt{AB}}\cdot\frac{d\Omega}{dr}\right) = 16\pi(P+\rho)(\Omega-\omega)\sqrt{\frac{A}{B}}r^4. \tag{6}$$