

УДК 681.142.644.3.088

**ОЦЕНКА МАКСИМАЛЬНОЙ ПОГРЕШНОСТИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ
СТУПЕНЧАТОЙ ФУНКЦИИ ЦИФРОВЫМ ИНТЕГРАТОРОМ**

В. С. МОСКВИН, В. К. ЯСЕЛЬСКИЙ, Е. М. БЕЛОВ

(Представлена научным семинаром физико-технического факультета)

Цифровые интеграторы находят широкое применение в цифровых дифференциальных анализаторах, в специализированных вычислительных устройствах.

В ряде работ [1, 2] достаточно полно проведен анализ точных характеристик цифровых интеграторов, построенных на обычных двоичных умножителях.

Применение в интеграторах счетчиков циклического кода дает определенное преимущество, но в этом случае возникают некоторые особенности при оценке точности их работы.

Следует заметить, что задача нахождения погрешности устройства, содержащего цифровые интеграторы, не может в общем случае сводиться к задаче о точности интегрирования ступенчатой функции. Исключение составляют цифровые линейные интеграторы (их интеграторы работают в режиме интегрирования скачка), на примере которых целесообразно провести анализ точности выполнения указанной операции [1].

Поскольку цифровые вычислительные устройства дают значение ординат функции в дискретных точках, то рассматривать погрешность имеет смысл в этих же точках при целочисленных значениях аргумента, выраженных в виде числа импульсов.

Предположим, что на вход регистра интегратора, имеющего n разрядов и работающего в циклическом коде, поступило N импульсов. Тогда из N поступивших импульсов со счетного выхода триггера i -го разряда снимем

$$\text{ent} \left(N \cdot 2^{i-n-1} + \frac{3}{4} \right) \text{ импульсов,}$$

а с инверсного выхода

$$\text{ent} \left(N \cdot 2^{i-n-1} + \frac{1}{4} \right) \text{ импульсов.}$$

Индекс $i = 0$ относится к триггеру последнего разряда, $i = 1$ — предпоследнего разряда и т. д. Символ ent означает выделение целочисленной части числа.

Число импульсов, поступивших на вход регистра интерполятора за цикл, равно

$$\Delta x = 2^n.$$

Под погрешностью интегрирования ступенчатой функции будем понимать разность между значением выходной величины y_1 , соответствующей точному выполнению операции интегрирования, и величиной y_2 , выдаваемой устройством при одном и том же значении аргумента.

Очевидно, в соответствии с рис. 1, где представлена ступенчатая кривая, аппроксимирующая линейную функцию заданного наклона, можно записать

$$y_1 = \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right) \cdot x, \quad (1)$$

где Δy — общее число импульсов, поступивших с выхода устройства за цикл.

Учитывая особенность формирования импульсных наборов в интеграторе, общее число импульсов, задаваемое кодом, представим в виде

$$\Delta y = \sum_{i=1}^{n-1} 2^{i-1} K_i + \sum_{i=1}^{n-1} 2^{i-1} \bar{K}_i + 1 \cdot K_0, \quad (2)$$

где K_i и $\bar{K}_i$ принимают значения 1 и 0 и являются коэффициентами перед соответствующими степенями числа два при задании числа импульсов Δy в двоичной системе исчисления.

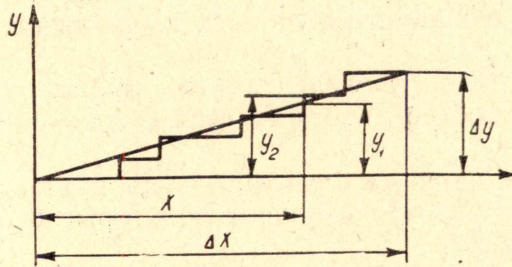


Рис. 1. Аппроксимация линейной функции заданного наклона ступенчатой кривой

Коэффициент K_i показывает, триггеры каких разрядов и какие их выходные цепи участвуют в выполнении операции интегрирования.

K_0 — счетный выход триггера последнего разряда;

$\bar{K}_1$ — инверсный выход триггера предпоследнего разряда.

На основании проведенных рассуждений получим

$$y_1 = 1 \cdot N \cdot 2^{-n} K_0 + \sum_{i=1}^{n-1} N \cdot 2^{i-n-1} K_i + \sum_{i=1}^{n-1} N \cdot 2^{i-n-1} \bar{K}_i, \quad (3)$$

$$y_2 = \sum_{i=0}^{n-1} \text{ent} \left(N \cdot 2^{i-n-1} + \frac{3}{4} \right) K_i + \sum_{i=0}^{n-1} \text{ent} \left(N \cdot 2^{i-n-1} + \frac{1}{4} \right) \bar{K}_i. \quad (4)$$

Отсюда погрешность интегрирования ступенчатой функции

$$\Delta = y_1 - y_2. \quad (5)$$

Для обеспечения необходимой точности выполнения интегрирования важно знать, какую максимальную ошибку можно ожидать от принятого метода интегрирования при заданном числе разрядов n счетчика.

Воспользуемся неравенствами

$$\text{ent} \left(N \cdot 2^{i-n-1} + \frac{3}{4} \right) \geq \left(N \cdot 2^{i-n-1} + \frac{3}{4} - 1 \right) \quad (6)$$

и

$$\text{ent} \left(N \cdot 2^{i-n-1} + \frac{1}{4} \right) \geq N \cdot 2^{i-n-1}. \quad (7)$$

В соответствии с выражениями (6) и (7) соотношение (5) можно переписать в виде

$$\Delta \leq N \cdot 2^{-n} \cdot K_0 + \sum_{i=1}^{n-1} N \cdot 2^{i-n-1} K_i + \sum_{i=1}^{n-1} N \cdot 2^{i-n-1} \bar{K}_i - \\ - \sum_{i=0}^{n-1} \left(N \cdot 2^{i-n-1} - \frac{1}{4} \right) K_i - \sum_{i=0}^{n-1} N \cdot 2^{i-n-1} \cdot \bar{K}_i. \quad (8)$$

Предположим, что при изменении i в указанных пределах все коэффициенты K_i и $\bar{K}_i$ принимают значения, равные единице.

Это допущение позволяет представить неравенство (8) так:

$$\Delta \leq N \cdot 2^{-n} + \frac{1}{4} \sum_{i=0}^{n-1} K_i - 2 \cdot N \cdot 2^{-n-1}. \quad (9)$$

Произведя некоторые преобразования, получим

$$\Delta_{\max} \leq \frac{n}{4}. \quad (10)$$

Таким образом, проведенная оценка максимальной погрешности интегрирования ступенчатой функции показывает, что абсолютная ошибка возрастает с увеличением числа разрядов интерполятора, но не превосходит величины $\frac{n}{4}$. Следует однако учитывать, что с ростом n уменьшается цена деления импульса.

Полученное соотношение (10) позволяет оценить максимальную погрешность интегрирования в произвольной дискретной точке траектории для различного числа разрядов n регистра интерполятора.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Воронов, А. Р. Гарбузов и др. Цифровые аналоги для систем автоматического управления. М., изд-во АН СССР, 1960.
2. А. В. Каляев. Введение в теорию цифровых интеграторов. Киев, «Наукова думка», 1964.