ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА им. С. М. КИРОВА

Том 293 1977

УДК 518 : 517.392

ОЦЕНКА НИЖНЕЙ ГРАНИЦЫ ПОГРЕШНОСТИ ФОРМУЛ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ НА КЛАССЕ ФУНКЦИЙ

В. Т. КАЛАЙДА, В. К. ЯСЕЛЬСКИЙ

(Представлена научным семинаром физико-технического факультета)

Если функция от n переменных допускает разложение в ряд Фурье

$$f(x_1, ..., x_n) = \sum_{m_1, ..., m_n=-\infty}^{\infty} C(m_1, ..., m_n)\, e^{2\pi i (m_1 x_1 + ... + m_n x_n)} \qquad (1)$$

и для коэффициентов разложения $C(m_1, ..., m_n)$ справедливо неравенство

$$C(m_1, ..., m_n) \leqslant e^{h(|m_1| + ... + |m_n|)}, \qquad (2)$$

то функция $f(x_1, ..., x_n)$ принадлежит к классу функций $A_n(h)$ [1].

Частным случаем разложения (1), имеющим большое практическое применение при решении физических задач в цилиндрической системе координат, является разложение функции одного переменного в ряд по синусам

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin 2\pi mx. \qquad (3)$$

Так как в общем случае для функции $f(x)$, допускающей разложение в ряд Фурье, справедливо равенство [2]

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos 2\pi mx + b_m \sin 2\pi mx, \qquad (4)$$

где

$$C_m = \frac{1}{2}(a_m - ib_m), \quad b_0 = 0,$$

то условие принадлежности функции, допускающей разложение (3) к классу $A_1(h)$, можно записать в виде

$$\left|\frac{b_m}{2}\right| \leqslant e^{-hm}. \qquad (5)$$

Целью данной работы является оценка нижней границы погрешности квадратурных формул на классе функций $A_1(h)$, допускающих разложение в ряд Фурье по формуле (3).

При выводе выражений, характеризующих нижнюю погрешность формул численного интегрирования на классе функций, описываемом соотношениями (3), (5), можно воспользоваться результатами работы [1].

Пусть на единичном сегменте $[0, 1]$ заданы N точек x_j $(j = 1, 2, \ldots, N)$. Тогда каков бы ни был способ приближенного вычисления $\int_0^1 f(x)\,dx$ по значениям функции $f(x)$, взятым в N произвольных точках x_j сегмента $[0, 1]$, в классе $A_1(h)$ найдется функция, для которой ошибка, получающаяся при этом способе вычисления интеграла, будет не меньше $e^{-h(N+1)}$.

Доказательство. Обозначим через $\sigma(M)$ множество целочисленных точек m в области $m \leqslant M$, а через $S(M)$ — их количество. Пусть M настолько велико, что $S(M) \geqslant N + 1$. С другой стороны, число точек $S(M)$ в области $\sigma(M)$ будет равно M $(m = 1,\ m = 2, \ldots, m = M)$. Тогда, чтобы удовлетворить неравенству $S(M) \geqslant N + 1$, M должно быть больше или равно $N + 1$. Примем $M = N + 1$.

Построим полином вида

$$T_0(x) = \sum_{m \in \sigma(M)} b_m^0 \sin 2\pi mx \not\equiv 0 \tag{6}$$

и потребуем, чтобы $T_0(x_j) = 0$ $(j = 1, 2, \ldots, N)$. Для определения его коэффициентов Фурье мы получим однородную систему линейных уравнений с числом неизвестных, большим числа уравнений (число уравнений N, число неизвестных $N + 1$). Поэтому такие полиномы существуют.

Для того, чтобы обеспечить принадлежность рассматриваемого полинома к классу $A_1(h)$, преобразуем его к виду

$$T_1(x) = \frac{2e^{-hM} \sin 2\pi m' x}{b^0 m'} T_0, \tag{7}$$

где

$$|b_{m'}^0| = \max_m |b_m^0|.$$

Очевидно, что

$$T_1 \in A_1(h) \text{ и } T_1(x_j) = 0, \tag{8}$$

$(j = 1, \ldots, N)$. Следовательно, вычисленное интегральное значение полинома $T_1(x)$ путем использования квадратурных формул с узлами $x_j (j = 1, 2, \ldots, N)$ равно нулю.

Но проинтегрировав (7), получим

$$\int_0^1 T_1(x)\,dx = e^{-h(N+1)}. \tag{9}$$

Следовательно,

$$\int_0^1 T_1(x)\,dx - \sum_{j=1}^{N} C_j T_1(x_j) = e^{-h(N+1)}. \tag{10}$$

Таким образом, нижняя граница формул численного интегрирования на классе функций, описываемом соотношением (3), (5), может быть оценена величиной

$$R_н \leqslant e^{-h(N+1)}. \tag{11}$$

Практически интересен также случай разложения функции в ряд

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} B_m \sin \pi mx. \tag{12}$$

Этот случай сводится к уже рассмотренному путем введения новой переменной $t = x/2$.

При помощи легко доказываемого равенства

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 2\int_0^{0,5} f(2t)\,dt \tag{13}$$

условия принадлежности функции, допускающей разложение (12) к классу функций $A_1(h)$, получаются в виде

$$|B_m| \leqslant e^{-hm}. \tag{14}$$

Так как интегрирование функции в данном случае ведется на интервале [0,1/2], то легко показать, что нижняя граница погрешности численного интегрирования в два раза меньше, чем на полном интервале. Тогда, учитывая (4), получим

$$R'_{\text{н}} \leqslant \frac{1}{4} e^{-h(N+1)}. \tag{15}$$

Следует отметить, что если амплитуда первой гармоники разложения (3), (12) максимальна, а амплитуды остальных гармоник убывают приблизительно по экспоненциальному закону, то для величины нижней границы погрешности квадратурных формул (11), (15) необходимо ввести корректирующие множители.

Пусть коэффициенты разложения (3), (12) убывают по законам

$$|b_m| \leqslant |b_1|\, e^{-h(m-1)}, \tag{16}$$

$$|B_m| \leqslant |B_1|\, e^{-h(m-1)}. \tag{17}$$

Это означает, что в ограничения (5), (14) введены корректирующие множители

$$\left|\frac{b_1}{2}\right| e^h, \tag{18}$$

$$|B_1|\, e^h \tag{19}$$

соответственно.

В этом случае на множители (18) и (19) умножатся и величины нижней границы погрешности (11) и (15). То есть, конечный результат может быть представлен соответственно в виде

$$R_{\text{н}} \leqslant \frac{1}{2} |b_1|\, e^{-hN}, \tag{20}$$

$$R'_{\text{н}} \leqslant \frac{1}{4} |B_1|\, e^{-hN}. \tag{21}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Ф. Шарыгин. Оценка снизу погрешности квадратурных формул на классах функций. Журнал вычислительной математики и математической физики, 1963, т. 3, № 2.

2. И. С. Градштейн и И. М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., «Наука», 1971.