ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА им. С. М. КИРОВА

Том 293 1977

УДК 518.517.392

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ ПРИ ВЫЧИСЛЕНИИ НЕКОТОРОГО ВИДА ОБЪЕМНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

В. Н. ПАДАЛКО, С. М. НЕЕЛОВ, В. К. ЯСЕЛЬСКИЙ, Е. М. БЕЛОВ

(Представлена научным семинаром физико-технического факультета)

При вычислении тройного интеграла вида

$$N(t) = \int_V I(r, t)\, \varphi^2(r, t)\, dv, \tag{1}$$

когда поведение функции $J(r, t)$ во времени описывается дифференциальным уравнением первого порядка с разделяющимися переменными

$$\frac{d}{dt} I(r, t) = AI(r, t) + B\varphi(r, t), \tag{2}$$

где A и B постоянные коэффициенты, а функция φ(r, t) может быть представлена в виде ряда по собственным функциям

$$\varphi(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\, \psi_n(r), \tag{3}$$

причем

$$a_n(t) = \frac{\int_V \varphi(r, t)\, \psi_n(r)\, dv}{\int_V \psi_n^2(r)\, dv}, \tag{4}$$

можно воспользоваться методом разделения переменных. С этой целью необходимо функцию $J(r, t)$ разложить в ряд по той же системе собственных функций, что и функцию $\varphi(r, t)$, то есть

$$I(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(t)\, \psi_n(r). \tag{5}$$

Подставляя выражения (5) и (3) в уравнение (2), получим систему уравнений для вычисления коэффициентов разложения функции $J(r, t)$

$$\frac{d}{dt} C_n(t) = AC_n(t) + Ba_n(t). \tag{6}$$

Интеграл $N(t)$ в этом случае будет выглядеть следующим образом:

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(t) \int_V \psi_n(r)\, \varphi^2(r, t)\, dv. \tag{7}$$

Научно-техническая библиотека ТПИ
№ 77-6676

Производя некоторые преобразования подынтегрального выражения, получим

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(t) \int_V \psi_n(r) \varphi(r, t) \sum_{m=1}^{\infty} a_m(t) \psi_m(r)\, dv =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_n(t)\, a_m(t) \int_V \psi_n(r) \psi_m(r) \varphi(r, t)\, dv =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_n(t)\, a_m(t)\, F_{nm}(t), \tag{8}$$

где

$$F_{nm}(t) = \int_V \psi_n(r) \psi_m(r) \varphi(r, t)\, dv. \tag{9}$$

В работе [1], где проводилось исследование функции $F_{nm}(t)$ для случая, когда функции $\Psi_n(r)$ определяются из уравнений Гельмгольца, показано, что с достаточной для практики точностью в подобных вычислениях можно учитывать только члены, в которых $n = m$. Тогда выражение для вычисления интеграла $N(t)$ значительно упрощается и принимает вид

$$N(t) \approx \sum_{n=1}^{\infty} C_n(t)\, a_n(t)\, F_{nn}(t). \tag{10}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. G. L. Geza. The Effect of Modal Interaction in the Xenon Instability Problem. Nuclear Science and Engnieering, 13, № 4, 1962.