

**ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ
ПРИ ВЫЧИСЛЕНИИ НЕКОТОРОГО ВИДА
ОБЪЕМНЫХ ИНТЕГРАЛОВ**

В. Н. ПАДАЛКО, С. М. НЕЕЛОВ, В. К. ЯСЕЛЬСКИЙ, Е. М. БЕЛОВ

(Представлена научным семинаром физико-технического факультета)

При вычислении тройного интеграла вида

$$N(t) = \int_V I(r, t) \varphi^2(r, t) dv, \quad (1)$$

когда поведение функции $J(r, t)$ во времени описывается дифференциальным уравнением первого порядка с разделяющимися переменными

$$\frac{d}{dt} I(r, t) = AI(r, t) + B\varphi(r, t), \quad (2)$$

где A и B постоянные коэффициенты, а функция $\varphi(r, t)$ может быть представлена в виде ряда по собственным функциям

$$\varphi(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \psi_n(r), \quad (3)$$

причем

$$a_n(t) = \frac{\int_V \varphi(r, t) \psi_n(r) dv}{\int_V \psi_n^2(r) dv}, \quad (4)$$

можно воспользоваться методом разделения переменных. С этой целью необходимо функцию $J(r, t)$ разложить в ряд по той же системе собственных функций, что и функцию $\varphi(r, t)$, то есть

$$I(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(t) \psi_n(r). \quad (5)$$

Подставляя выражения (5) и (3) в уравнение (2), получим систему уравнений для вычисления коэффициентов разложения функции $J(r, t)$

$$\frac{d}{dt} C_n(t) = AC_n(t) + Ba_n(t). \quad (6)$$

Интеграл $N(t)$ в этом случае будет выглядеть следующим образом:

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(t) \int_V \psi_n(r) \varphi^2(r, t) dv. \quad (7)$$

Производя некоторые преобразования подынтегрального выражения, получим

$$\begin{aligned}
 N(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n(t) \int_V \psi_n(r) \varphi(r, t) \sum_{m=1}^{\infty} a_m(t) \psi_m(r) dv = \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_n(t) a_m(t) \int_V \psi_n(r) \psi_m(r) \varphi(r, t) dv = \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_n(t) a_m(t) F_{nm}(t),
 \end{aligned} \tag{8}$$

где

$$F_{nm}(t) = \int_V \psi_n(r) \psi_m(r) \varphi(r, t) dv. \tag{9}$$

В работе [1], где проводилось исследование функции $F_{nm}(t)$ для случая, когда функции $\Psi_n(r)$ определяются из уравнений Гельмгольца, показано, что с достаточной для практики точностью в подобных вычислениях можно учитывать только члены, в которых $n = m$. Тогда выражение для вычисления интеграла $N(t)$ значительно упрощается и принимает вид

$$N(t) \approx \sum_{n=1}^{\infty} C_n(t) a_n(t) F_{nn}(t). \tag{10}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. G. L. Geza. The Effect of Modal Interaction in the Xenon Instability Problem. Nuclear Science and Engineering, 13, № 4, 1962.