ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА им. С. М. КИРОВА

Том 293 1977

УДК 518.517.392

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ НЕРАВЕНСТВА ГЕЛЬДЕРА ПРИ ВЫЧИСЛЕНИИ НЕКОТОРОГО ВИДА ИНТЕГРАЛОВ

С. М. НЕЕЛОВ, В. К. ЯСЕЛЬСКИЙ

(Представлена научным семинаром физико-технического факультета)

Определение интегралов вида

$$I(t) = \int_V X(r, t)\,\varphi^2(r, t)\,dv \tag{1}$$

рассматривается в ряде работ [1—3] для некоторых частных случаев, когда функции $X(r, t)$ и $\varphi(r, t)$ постоянны в различных точках пространства r и не меняются с течением времени t.

В общем случае функции $X(r, t)$ и $\varphi(r, t)$ не постоянны во времени. $X(r, t)$ описывается дифференциальным уравнением первого порядка с неразделяющимися переменными [1, 4] и положительна в объеме интегрирования V, а функция $\varphi(r, t)$ меняет с течением времени свое значение от нуля до единицы $(0 \leqslant \varphi(r, t) \leqslant 1)$. При этом для определения интеграла (1) можно воспользоваться методикой, заключающейся в нахождении полной производной по времени от $I(t)$

$$\frac{d}{dt}\int_V X(r, t)\,\varphi^2(r, t)\,dv. \tag{2}$$

Как видно из выражения (2), данная задача сводится к вычислению интегралов, являющихся членами полной производной по времени от $I(t)$, то есть интегралов вида

$$\int_V X'(r, t)\,\varphi^2(r, t)\,dv \tag{3}$$

и

$$\int_V X(r, t)\,(\varphi^2(r, t))'\,dv, \tag{4}$$

где $X'(r, t)$ и $(\varphi^2(r, t))'$ — производные по времени от функций

$$X(r, t) \text{ и } \varphi^2(r, t).$$

Из работ [1, 2] следует, что интеграл (3) при подстановке в него конкретных выражений для $X'(r, t)$ можно выразить через $I(t)$

$$\int_V X'(r, t)\,\varphi^2(r, t)\,dv = f[I(t)]. \tag{5}$$

В свою очередь, для того, чтобы интеграл (4) также выразить через интеграл (1), необходимо провести некоторые преобразования подынтегрального выражения

$$\int\limits_V X(r, t) \frac{d}{dt} \varphi^2(r, t)\, dv = \int\limits_V X(r, t) \varphi^2(r, t) \frac{d}{dt} \ln \varphi^2(r, t)\, dv. \qquad (6)$$

Разложим $\varphi(r, t)$ в ряд по собственным функциям [4]

$$\varphi(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \psi_n(r), \qquad (7)$$

где $\psi_n(r)$ определяются из уравнений Гельмгольца

$$\nabla^2 \psi_n(r) + B_n^2 \psi_n(r) = 0, \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \qquad (8)$$

а a_n представляют собой коэффициенты разложения.

В работе Geza [4], где проводилось исследование данного разложения, показывается, что ряд (7) является сходящимся, и для оценочных расчетов с погрешностью 3—5% достаточно четырех-пяти первых членов разложения.

Для разделения переменных в правой части выражения (7) воспользуемся неравенством Гельдера для рядов

$$\varphi(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \psi_n(r) \leqslant \left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2(t)\right]^{1/2} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \psi_n^2(r)\right]^{1/2} \qquad (9)$$

Из полученного соотношения (9) можно логарифмическую производную функции $\varphi^2(r, t)$ по времени представить в виде

$$\frac{d}{dt} \ln \varphi^2(r, t) = \frac{d}{dt} \ln \left\{\sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \psi_n(r)\right\}^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{d}{dt} \ln \left\{\left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2(t)\right]^{1/2} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \psi_n^2(r)\right]^{1/2}\right\}^2 =$$

$$= \frac{d}{dt} \ln \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2(t). \qquad (10)$$

В результате подстановки (10) в (6) можно получить выражение для оценки интеграла (4)

$$\int\limits_V X(r, t) (\varphi^2(r, t))' dv \leqslant \int\limits_V X(r, t) \varphi^2(r, t)\, dv \frac{d}{dt} \ln \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2(t). \qquad (11)$$

Знак неравенства при подстановке (10) в (6) сохраняется в силу свойств интегралов Стилтьеса.

Конечная формула для оценки выражения (2) имеет вид

$$\frac{d}{dt} I(t) \approx f[I(t)] + I(t) \frac{d}{dt} \ln \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2(t) \qquad (12)$$

и может быть использована в качестве алгоритма для вычисления интеграла $I(t)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. P. Wenzel. Effektive stationäre Xenonvergiftung. Kernenergie, № 10/11, 1961.
2. P. Wenzel. Effektive Xenonvergiftung nach Abschalten. Kernenergie, № 12, 1961.
3. W. Hälg u. a. Theoretische und experimente Untersuchungen über Reaktivitätsänderungen, verursacht durch Xenonvergiftung. Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik, Vol. 14, 1963.
4. G. L. Geza. The Effect of Modal Interaction in the Xenon Instability. Nuclear Science and Engineering, 13, № 4, 1962.