

**МЕТОДИКА ПОСТРОЕНИЯ КОРНЕВОГО ГОДОГРАФА  
СИСТЕМ, ОПИСЫВАЕМЫХ УРАВНЕНИЕМ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА**

Ю. С. МЕЛЬНИКОВ, А. П. ПАРАМЗИН

(Представлена научно-техническим семинаром кафедры автоматики и телемеханики)

Статья посвящена описанию предложенной авторами методики геометрического построения корневого годографа систем, описываемых уравнением третьего порядка и сравнению ее с существующими методиками построения корневых годографов.

Характеристическое уравнение замкнутых систем, для которых применима разработанная методика, имеет следующий вид:

$$s(s^2 + 2\zeta\Omega_0s + \Omega_0^2) + cK = 0, \quad (1)$$

где  $c = 1/A_0$  — коэффициент, получаемый при переходе к уравнению (1) от уравнения

$$s(A_0s^2 + A_1s + 1) + K = 0; \quad (2)$$

$\zeta = \frac{A_1}{2\sqrt{A_0}}$  — декремент затухания системы; предполагается, что

$\zeta \leq 1$ ,  $\Omega_0 = \frac{1}{\sqrt{A_0}}$  — частота собственных колебаний.

Известно, что метод корневого годографа, являясь графоаналитическим, обладает большой наглядностью, удобством и широкими возможностями. Корневыми годографами называются траектории, описываемые корнями характеристического уравнения системы в комплексной плоскости корней при изменении одного из параметров от 0 до  $\infty$ . Чаще всего в качестве такого параметра берется коэффициент усиления  $K$ .

Существует две методики построения корневого годографа, первая предложена Эвансом [1], а вторая Бендриковым Г. А. и Теодорчиком К. Ф. [2].

Методика построения корневых годографов, предложенная Эвансом, использует основное фазовое уравнение геометрического места корней

$$\sum_{j=1}^m \theta_j^0 - \sum_{i=1}^n \theta_i = \pi(2\kappa + 1), \quad \kappa = 0, 1, 2, \dots, \quad (3)$$

где  $\theta_i$  и  $\theta_j^0$  — углы, составленные векторами, проведенными из основных точек ( $i$  — начальные точки корневого годографа,  $j$  — предельные точки) в любую точку геометрического места корней, с положительным направлением оси абсцисс комплексной плоскости;  $n$  и  $m$  — число полюсов и нулей, соответственно, передаточной функции системы в разомкнутом состоянии.

Если передаточную функцию разомкнутой системы представить в виде

$$KW(s) = cK \frac{\prod (s - N_j)}{\prod_i (s - P_i)}, \quad (4)$$

где  $c$  — множитель, появляющийся при этом переходе,  $N$  и  $P$  — нуль и полюс, соответственно, то можно записать уравнение модулей, которое используется для определения величины свободного параметра  $K$  в любой точке построенного корневого годографа

$$K = \frac{1}{c} \cdot \frac{\prod_i l_i}{\prod_j l_j^0}, \quad (5)$$

где  $l_i$  и  $l_j^0$  — натуральная длина векторов (с учетом масштаба), проведенных из основных точек в точку, лежащую на к. г. Если передаточная функция не содержит нулей, то

$$K = \frac{1}{c} \cdot \prod_i l_i. \quad (5a)$$

Построение корневых годографов начинается с нанесения на комплексную плоскость полюсов и нулей передаточной функции (4), имея в виду при этом, что  $m$  ветвей к. г. оканчиваются в нулях, а  $(n - m)$  — уходят в бесконечность. Строят корневые годографы методом проб, который заключается в том, что для каждой предполагаемой точки корневого годографа на комплексной плоскости проверяется уравнение фаз (3). Эта процедура повторяется до тех пор, пока не будет построен целиком годограф, и тем точнее будет выполнено построение, чем тщательнее измеряются углы  $\theta_i$  и  $\theta_j$  и чем большее число точек взято. В этом и заключается недостаток методики, предложенной Эвансом.

Методика, описанная Г. А. Бендриковым и К. Ф. Теодорчиком, является аналитической. Вывод уравнения, позволяющего по точкам строить корневые годографы семейства уравнений свободных движений, заданного в виде

$$\Phi_n(s) + K \cdot \Psi_m(s) = 0. \quad (6)$$

основывается на одном тождественном преобразовании целых полиномов от комплексного аргумента  $s = \sigma + j\omega$ .

Преобразование это имеет вид:

$$\begin{aligned} \Phi_n(s) = & \left[ \Phi_n(\sigma) - \frac{\omega^2}{2!} \cdot \Phi_n^{II}(\sigma) + \frac{\omega^4}{4!} \cdot \Phi_n^{IV}(\sigma) - \dots \right] + \\ & + j\omega \left[ \Phi_n^I(\sigma) - \frac{\omega^2}{3!} \cdot \Phi_n^{III}(\sigma) + \frac{\omega^4}{5!} \cdot \Phi_n^V(\sigma) - \dots \right], \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\Phi_n^v(\sigma)$  означает  $v$ -ю производную от  $\Phi_n(s)$  с заменой  $s$  на  $\sigma$ . Применим формулу (7) к обоим полиномам общего выражения (6). Приравняв порознь нулю действительную и мнимые части и исключив из этих уравнений свободный параметр  $K$ , найдем искомое выражение, связывающее абсциссу  $\sigma$  и ординату  $\omega$  любой точки  $s^* = \sigma + j\omega$  геометрического места корней характеристического уравнения (6):

$$\left[ \Phi_n(\sigma) - \frac{\omega^2}{2!} \cdot \Phi_n^{II}(\sigma) + \dots \right] \left[ \Psi_m^I(\sigma) - \frac{\omega^2}{3!} \cdot \Psi_m^{III}(\sigma) + \dots \right] - \left[ \Phi_n^I(\sigma) - \frac{\omega^2}{3!} \cdot \Phi_n^{III}(\sigma) + \dots \right] \left[ \Psi_m(\sigma) - \frac{\omega^2}{2!} \cdot \Psi_m^{II}(\sigma) + \dots \right] = 0. \quad (8)$$

На это равенство можно смотреть как на уравнение, позволяющее по заданной абсциссе  $\sigma$  найти частоты  $\omega$ , при которых прямая, перпендикулярная к действительной оси, проведенная через любую точку  $\sigma$ , пересекает траектории корней системы (6).

Выражение для вычислений свободного параметра

$$-K = \frac{\Phi_n(\sigma) - \frac{\omega^2}{2!} \cdot \Phi_n^{II}(\sigma) + \dots}{\Psi_m(\sigma) - \frac{\omega^2}{2!} \cdot \Psi_m^{II}(\sigma) + \dots}. \quad (9)$$

Видно, что уравнения (8) и (9), используемые для аналитического построения корневых годографов, сложны, а связанные с ними вычисления трудоемки. Применение аналитического способа построения корневого годографа оправдано лишь в тех случаях, когда характеристическое уравнение (6) имеет высокий порядок, и когда невозможно заранее предсказать примерный вид корневого годографа.

Предлагаемый в данной статье способ построения корневых годографов систем, описываемых уравнением (1), при  $\zeta \ll 1$  лишен недостатков, присущих описанным выше методикам.

В процессе исследований было установлено, что окружность с центром в точке  $a$  (рис. 1) является единственным геометрическим местом начальных точек семейства корневых годографов, пересекающихся в одной, общей для всех, точке  $s$ . Точка  $s$  представляет собой полюс замкнутой системы, описываемой уравнением (1). Как видно из построения на рис. 1  $os = as = R$ .

Покажем, что для полюса  $s$  (рис. 2) выполняется уравнение фаз в любом случае, когда начальные точки корневых годографов принадлежат окружности, описанной из центра  $a$  и проходящей через полюс  $s$ . В комплексной плоскости полюс  $s$  примем за полюс замкнутой системы, описываемой уравне-

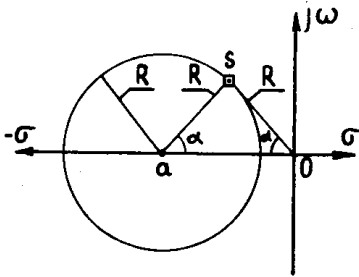


Рис. 1. Геометрическое место семейства корневых годографов, проходящих через фиксированный полюс

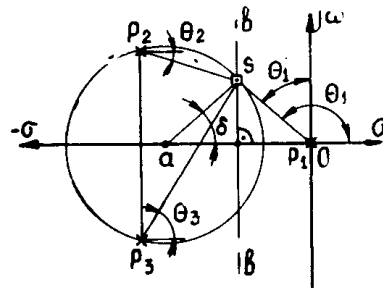


Рис. 2

нием (1).

Строим равнобедренный треугольник  $aso$  ( $as=os$ ) и из точки  $a$  как из центра описываем окружность, проходящую через полюс  $s$ . На проведенной окружности выбираем произвольные комплексно-сопряженные точки  $P_2$  и  $P_3$ . Требуется доказать, что точка  $s$  принадлежит корневному годографу с начальными точками  $P_1, P_2$  и  $P_3$ , то есть в точке  $s$  выполняется уравнение фаз (3).

Для системы, описываемой уравнением (1), основное фазовое уравнение можно записать

$$-\theta_1 + \theta_2 - \theta_3 = -180^\circ, \quad (10)$$

если учесть, что  $\theta_1 = 90^\circ + \theta_1^I$ , то

$$\theta_3 - \theta_2 = 90^\circ - \theta_1^I. \quad (10a)$$

Применяя ряд аксиом геометрии, нетрудно получить

$$\delta = 360^\circ - [180^\circ + (\theta_2 + \theta_3) + 2(90^\circ - \theta_3)] = \theta_3 - \theta_2. \quad (11)$$

Угол  $\delta$  равен углу  $\delta$  — из построения, значит он равен  $\theta_3 - \theta_2$ , тогда

$$\theta_1^I + \theta_3 - \theta_2 = 90^\circ. \quad (12)$$

Учитывая соотношение  $\theta_1^I = \theta_1 - 90^\circ$ , можно переписать (12) в виде

$$\theta_1 - 90^\circ + \theta_3 - \theta_2 = 90^\circ$$

или

$$-\theta_1 + \theta_2 - \theta_3 = -180^\circ. \quad (12a)$$

Последнее уравнение есть не что иное, как основное уравнение фаз (10), то есть мы доказали, что полюс  $s$  принадлежит корневому годографу системы, описываемой уравнением (1), с начальными точками  $P_1, P_2, P_3$ .

По аналогии нетрудно показать, что для любой другой пары начальных точек, расположенных на той же окружности, при неизменном положении полюса  $s$  выполняется уравнение фаз (10).

С помощью уравнений фаз можно доказать также, что ни одна точка, расположенная вне рассматриваемой окружности, не является начальной точкой корневому годографу, проходящего через полюс  $s$ .

Оговоримся, что начальные точки на окружности могут располагаться только левее вертикальной прямой  $b-b$ .

На основании доказанного положения предлагается простой и точный способ построения корневому годографу системы третьего порядка, описываемой уравнением (1) при  $\zeta \ll 1$ .

Произвольным раствором циркуля описываем две дуги окружностей в поле корней с центрами в начале координат и в известной начальной точке корневому годографу  $P_2$  (рис. 3). В последнем случае дуга проводится только на участке пересечения ее с осью абсцисс (точка  $c$  рис. 3), то есть радиус окружности должен быть таким, чтобы дуга либо пересекала, либо касалась оси абсцисс. Тем же раствором циркуля проводим третью дугу окружности с центром в точке  $c$ . Точка пересечения  $d$  дуг окружностей есть

искомое положение одного из множества полюсов корневому годографу замкнутой системы, описываемой уравнением (1). Изменяя радиусы вспомогательных окружностей, можно определить положение других точек корневому годографу, в результате чего построить одну ветвь годографу. Вторая ветвь располагается симметрично первой, поскольку полюсы комплексно-сопряженные. Третья ветвь корневому годографу совпадает с осью абсцисс в левой полуплоскости.

Как видно, построение корневых годографов рассматриваемых систем предложенным способом значительно проще, быстрее и точнее, чем при использовании двух описанных выше методик.

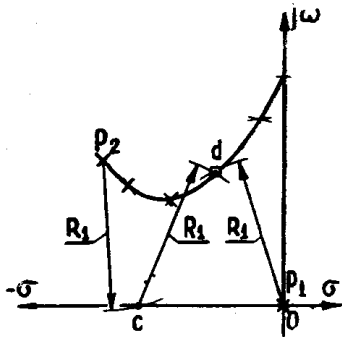


Рис. 3. Построение одной из двух симметричных ветвей корневому годографу систем, описываемых уравнением третьего порядка

Используя разработанный способ построения корневых годографов и методику поиска их начальных точек [3], можно достаточно быстро решить обратную задачу, то есть по заданному положению полюсов замкнутой системы определить параметры исследуемой системы  $A_0$ ,  $A_1$ ,  $K$ . Естественно, что эта задача имеет неоднозначное решение, поэтому необходимо первоначально задать ограничения на величину одного из искоемых параметров. Например, пусть требуется определить параметры  $A_0$  и  $K$ , если  $A_1' \leq A_1 \leq A_1''$ , и задано положение пары комплексно-сопряженных полюсов замкнутой системы.

В первую очередь строим две окружности 1 и 2 (рис. 4) с координатами их центров  $(-1/A_1' \pm j0)$  и  $(-1/A_1'' \pm j0)$ , соответственно, которые являются геометрическими местами начальных точек корневых годографов исследуемого уравнения (1) при  $A_1' = \text{const}$  и  $A_1'' = \text{const}$  и переменных  $A_0$ . С помощью способа, описанного в данной статье, строим окружность 3 с центром в точке  $a$ , которая является единственным геометрическим местом начальных точек семейства корневых годографов, проходящих через заданный полюс  $s$ . Окружность 3 пересекла окружности 1 и 2 в двух парах комплексно-сопряженных точек  $P_2', P_3'$  и  $P_2'', P_3''$ , которые являются граничными для совокупности начальных точек из всего семейства, расположенного на окружности 3.

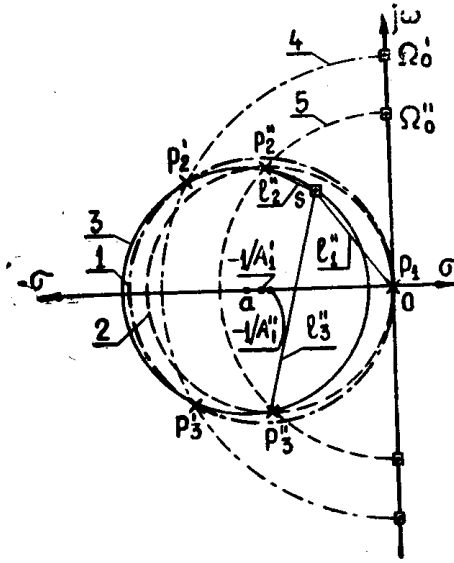


Рис. 4

Теперь нетрудно определить значения параметра  $A_0$ , соответствующие граничным значениям параметра  $A_1$ . Для этого через найденные начальные точки  $P_2'$  и  $P_2''$  проводим окружности 4 и 5 с центрами в начале координат до пересечения их с мнимой осью в точках  $\Omega_0'$  и  $\Omega_0''$ . Определенные таким путем собственные частоты связаны с параметром  $A_0$  следующими соотношениями:

$$A_0' = \frac{1}{(\Omega_0')^2}; \quad A_0'' = \frac{1}{(\Omega_0'')^2}. \quad (13)$$

$A_0'$  и  $A_0''$  есть не что иное, как граничные значения параметра  $A_0$ . Значение коэффициента усиления  $K$  в полюсе  $s$  каждый раз меняется и зависит от того, в каком месте дуги  $P_2'P_2''$  мы возьмем начальную точку корневого годографа. Крайним положениям начальных точек корневых годографов соответствуют граничные значения  $K'$  и  $K''$ , которые определяются с помощью уравнения модулей (5а). Например,

$$K'' = A_0'' \cdot l_1' \cdot l_2' \cdot l_3' \quad (а)$$

и аналогично

$$K' = A_0' \cdot l_1'' \cdot l_2'' \cdot l_3'' \quad (б)$$

Таким образом, очевидно, что задачи подобного типа могут быть легко решены с помощью предложенного способа.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Э. Г. Уддерман, Метод корневого годографа в теории автоматического управления. М.—Л., Госэнергоиздат, 1963.
2. Г. А. Бендриков, К. Ф. Теодорчик. Траектории корней линейных автоматических систем. М., «Наука», 1964.
3. Ю. С. Мельников, А. П. Парамзин. О применении метода корневого годографа к синтезу объединенных следящих систем. Статья в настоящем сборнике.