ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА им. С. М. КИРОВА

Том 294 1976

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА ДВИЖЕНИЯ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ В ВЕЩЕСТВЕ ПРИ НАЛИЧИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

В. М. РАЗИН

(Представлена научным семинаром кафедры вычислительной техники)

При расчетах активной биологической защиты представляется полезным получить уравнения движения релятивистских протонов в веществе при наличии магнитного поля, поскольку комбинированные способы защиты могут оказаться оптимальными в тех случаях, когда вес защитных экранов должен быть ограничен сверху.

Как известно [1], уравнение движения заряженной частицы в магнитном поле при отсутствии вещества в векторной форме имеет вид:

$$m\frac{dv}{dt}=\frac{e}{c}[\vec{v}\vec{B}], \tag{1}$$

где m — масса частицы; e — заряд; c — скорость света в вакууме; $\vec{v}$ — вектор скорости; $\vec{B}$ — вектор магнитной индукции.

Поскольку нас будут интересовать частицы, скорость которых соизмерима со скоростью света, то уравнение (1) следует записать в форме соотношения

$$\frac{d\vec{p}}{dt}=\frac{e}{c}[\vec{v}\vec{B}], \tag{2}$$

где $\vec{p}=m\vec{v}$ — импульс частицы, масса m которой зависит от энергии, т. е. скорости частицы.

При прохождении частицы через вещество будут иметь место различные взаимодействия частицы со средой, в результате чего энергия частицы будет уменьшаться вдоль траектории движения. В интересующем нас диапазоне энергий протонов главными являются потери на ионизацию атомов защитной среды. Потери энергии на ионизации будут эквивалентны действию некоторой силы, действующей на частицу (протон) в направлении, противоположном направлению вектора скорости. Величина этой силы будет равна удельной энергии ионизации на элемент длины траектории l, т. е. сила равна $\frac{dE}{dl}$.

При учете силы сопротивления вещества за счет ионизации уравнение (2) может быть представлено в векторной форме:

$$\frac{d\vec{p}}{dt}=\frac{e}{c}[\vec{v}\vec{B}]-\left|\frac{dE}{dl}\right|\frac{\vec{v}}{v}, \tag{3}$$

где прямые скобки означают абсолютное значение соответствующей величины, а v — это модуль вектора скорости частицы.

В релятивистском случае левая часть уравнения (3) должна быть представлена следующим образом:

$$\frac{d\vec{p}}{dt}=\frac{d}{dt}(m\vec{v})=\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\vec{v}\right), \tag{4}$$

где m_0 — масса покоя частицы.

В трехмерной прямоугольной системе координат имеет место соотношение

$$v^2=\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2, \tag{5}$$

где для сокращения записи первые производные по времени обозначены точками над соответствующими координатами.

Проекция векторного уравнения (4) на оси координат с учетом (5) дает возможность записать уравнение движения в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}{c^2}}}\,\dot{x}\right)=\frac{e}{c}B_z\dot{y}-\frac{e}{c}B_y\dot{z}-\left|\frac{dE}{dl}\right|\frac{\dot{x}}{v};\\
&\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}{c^2}}}\cdot\dot{y}\right)=\frac{e}{c}B_x\dot{z}-\frac{e}{c}B_z\dot{x}-\left|\frac{dE}{dl}\right|\frac{\dot{y}}{v};\\
&\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}{c^2}}}\cdot\dot{z}\right)=\frac{e}{c}B_y\dot{x}-\frac{e}{c}B_x\dot{y}-\left|\frac{dE}{dl}\right|\frac{\dot{z}}{v}.
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Здесь B_x, B_y и B_z — составляющие вектора магнитной индукции по осям координат.

Для сокращения записи введем обозначение

$$\varphi(v)=\left|\frac{dE}{dl}\right|\frac{1}{v} \tag{7}$$

и правые части уравнений системы (6) представим в виде

$$\left.\begin{aligned}
&-\varphi(v)\,\dot{x}+\frac{e}{c}B_z\dot{y}-\frac{e}{c}B_y\dot{z}=L;\\
&-\frac{e}{c}B_z\dot{x}-\varphi(v)\,\dot{y}+\frac{e}{c}B_x\dot{z}=M;\\
&\frac{e}{c}B_y\dot{x}-\frac{e}{c}B_x\dot{y}-\varphi(v)\,\dot{z}=N.
\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Раскрывая производные в левых частях системы (6) и учитывая (8), получим

$$\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\ddot{x}+\dot{x}\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}{c^2}}}\right)=L;$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\ddot{y}+\dot{y}\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}{c^2}}}\right)=M;\\
&\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\ddot{z}+\dot{z}\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}{c^2}}}\right)=N.
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Здесь $\beta=\frac{v}{c}=\frac{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}}{c}$ — релятивистский фактор, а две точки означает производную второго порядка по времени. Раскроем производную

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}{c}}}\right)=\frac{m_0}{c^2}\frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^3}}\cdot(\dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y}+\dot{z}\ddot{z}), \tag{10}$$

так как все координаты являются функциями времени. Подставляя (10) в систему уравнений (9) и выполняя несложные преобразования, получим

$$\left.\begin{aligned}
&\ddot{x}\,[c^2(1-\beta^2)+\dot{x}^2]+\dot{x}\dot{y}\ddot{y}+\dot{x}\dot{z}\ddot{z}=L_1,\\
&\dot{x}\dot{y}\ddot{x}+\ddot{y}\,[c^2(1-\beta^2)+\dot{y}^2]+\dot{y}\dot{z}\ddot{z}=M_1,\\
&\dot{x}\dot{z}\ddot{x}+\dot{y}\dot{z}\ddot{y}+[c^2(1-\beta^2)+\dot{z}^2]\,\ddot{z}=N_1.
\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Здесь введены для сокращения записи обозначения:

$$\left.\begin{aligned}
L_1&=\frac{c^2\sqrt{(1-\beta^2)^3}}{m_0}\cdot L;\\
M_1&=\frac{c^2\sqrt{(1-\beta^2)^3}}{m_0}M;\\
N_1&=\frac{c^2\sqrt{(1-\beta^2)^3}}{m_0}N.
\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

При моделировании обыкновенных дифференциальных уравнений на аналоговых вычислительных машинах (АВМ) принято разрешать эти уравнения относительно старших производных (метод понижения порядка производной).

Рассматриваем систему (11), как систему трех уравнений с тремя неизвестными производными $\ddot{x}$, $\ddot{z}$, $\ddot{y}$.

Вычисляем главный определитель системы (11)

$$\Delta=\begin{vmatrix}
c^2(1-\beta^2)+\dot{x}^2; & \dot{x}\dot{y}; & \dot{x}\dot{z};\\
\dot{x}\dot{y}; & c^2(1-\beta^2)+\dot{y}^2; & \dot{y}\dot{z};\\
\dot{x}\dot{z}; & \dot{y}\dot{z}; & c^2(1-\beta^2)+\dot{z}^2
\end{vmatrix} \tag{13}$$

Применяя правило Саррюса или какой-либо другой способ вычисления определителей и учитывая (5) в несложных, но громоздких преобразованиях, получим

$$\Delta=c^6(1-\beta^2)^2. \tag{14}$$

Теперь выражение, например, для $\ddot{x}$ будет иметь вид

$$\ddot{x} = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} L_1; & \dot{x}\dot{y}; & \dot{x}\dot{z}; \\ M_1; & [c^2(1-\beta^2)+\dot{y}^2]; & \dot{y}\dot{z}; \\ N_1; & \dot{y}\dot{z}; & [c^2(1-\beta^2)+\dot{z}^2]. \end{vmatrix} \tag{15}$$

Громоздкие алгебраические преобразования при вычислении (15) позволяют в конечном итоге получить сравнительно простое выражение для $\ddot{x}$

$$\ddot{x} = \frac{1}{m_0}\left(\frac{e}{c}B_z\dot{y} - \frac{e}{c}B_y\dot{z}\right)\sqrt{1-\beta^2} - \frac{1}{m_0}\varphi(v)\,\dot{x}\sqrt{(1-\beta^2)^3}. \tag{16}$$

Аналогично вычисляются выражения для $\ddot{y}$ и $\ddot{z}$. В результате получаем систему уравнений движения в виде:

$$\left.\begin{aligned} m_0\ddot{x} &= \left(\frac{e}{c}B_z\dot{y} - \frac{e}{c}B_y\dot{z}\right)\sqrt{1-\beta^2} - \varphi(v)\,\dot{x}\sqrt{(1-\beta^2)^3}; \\ m_0\ddot{y} &= \left(\frac{e}{c}B_x\dot{z} - \frac{e}{c}B_z\dot{x}\right)\sqrt{1-\beta^2} - \varphi(v)\,\dot{y}\sqrt{(1-\beta^2)^3}; \\ m_0\ddot{z} &= \left(\frac{e}{c}B_y\dot{x} - \frac{e}{c}B_x\dot{y}\right)\sqrt{1-\beta^2} - \varphi(v)\,\dot{z}\sqrt{(1-\beta^2)^3}. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

При $\beta = 0$ получаем уравнения движения заряженной частицы в веществе при наличии магнитного поля для нерелятивистского случая

$$\left.\begin{aligned} m_0\ddot{x} &= \frac{e}{c}B_z\dot{y} - \frac{e}{c}B_y\dot{z} - \varphi(v)\,\dot{x}; \\ m_0\ddot{y} &= \frac{e}{c}B_x\dot{z} - \frac{e}{c}B_z\dot{x} - \varphi(v)\,\dot{y}; \\ m_0\ddot{z} &= \frac{e}{c}B_y\dot{x} - \frac{e}{c}B_x\dot{y} - \varphi(v)\,\dot{z}. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Полученные уравнения движения имеют форму, удобную для моделирования на АВМ. В цилиндрической системе координат уравнения движения в релятивистском случае будут иметь вид:

$$\left.\begin{aligned} m_0(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) &= \frac{e}{c}(r\dot{\varphi}B_z - \dot{z}B_\varphi)\sqrt{1-\beta^2} - \varphi(v)\,\dot{r}\sqrt{(1-\beta^2)^3}; \\ m_0\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) &= \frac{e}{c}(\dot{z}B_r - \dot{r}B_z)\sqrt{1-\beta^2} - \varphi(v)\,r\dot{\varphi}\sqrt{(1-\beta^2)^3}; \\ m_0\ddot{z} &= \frac{e}{c}(\dot{r}B_\varphi - r\dot{\varphi}B_r)\sqrt{1-\beta^2} - \varphi(v)\,\dot{z}\sqrt{(1-\beta^2)^3}. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

При моделировании на АВМ полезно также учитывать связи между кинетической энергией частицы и ее скоростью в виде

$$\left.\begin{aligned} \beta &= \frac{v}{c} = \frac{\sqrt{E(E-2E_0)}}{E+E_0}; \\ E &= \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - m_0c^2 = \frac{E_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Здесь $E_0 = m_0c^2$ — энергия покоя частицы.