ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ. С. М. КИРОВА

Том 295 1976

О РАСЧЕТЕ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЯХ ПРИ СЛОЖНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

П. П. ГАЛИНСКИЙ

(Представлена научным семинаром кафедры теоретических основ электротехники)

Переходные процессы в линейных цепях с источниками э. д. с. и тока, описываемых гладкими или кусочно-гладкими функциями, обычно исследуются при помощи интегралов наложения (Дюамеля, Фурье), либо операторным методом. Названные методы являются универсальными для своих областей применения. Указанные универсальные методы в ряде случаев приводят к громоздким записям и вычислениям. Это обстоятельство оправдывает поиск методов непосредственного интегрирования дифференциальных уравнений состояния электрических цепей (классический метод) не только для случаев постоянных и гармонических источников, но и в случае источников, описываемых другими функциями.

В классическом методе, как известно, решение находится по методу суперпозиции в виде суммы частного решения полного уравнения (или системы уравнений) — принужденная составляющая решения — и общего решения однородного уравнения — свободная составляющая решения.

Для произвольных функций-воздействий возможно отдельное нахождение постоянных принужденного решения при несовпадении функций принужденной и свободной реакции цепи. При совпадении функций принужденной и свободной составляющей решения постоянные интегрирования находятся совместно для обоих составляющих решения так, как это принято в классическом методе при постоянных и гармонических воздействиях для постоянных свободного решения.

Вид функции принужденной реакции определяется видом функции возмущения (э. д. с., источника тока). В большинстве случаев вид принужденной реакции может быть определен суммой функции возмущения и ее производных. Это справедливо для функций возмущения, представляющих целые полиномы, показательные, гиперболические, гармонические функции и их попарные произведения. Например, для возмущения $e(t)=mt$ составляется сумма $e(t)+e'(t)=mt+m$. Вторая и высшие производные равны нулю. По полученной сумме составляется функция принужденной реакции $i_{\text{пр}}(t)=at+b$, где a и b — постоянные.

Для $e(t)=Ete^{-\alpha t}$ можно составить сумму $e(t)+e'(t)=Ete^{-\alpha t}-\alpha Ete^{-\alpha t}+Ee^{-\alpha t}$. Высшие производные функций нового вида не дают, следовательно, $i_{\text{пр}}(t)=ate^{-\alpha t}+be^{-\alpha t}$, где a, b — постоянные.

Аналогично для $e(t)=mt^2$ определяется функция принужденной реакции в виде квадратной параболы общего вида

$$i_{\text{пр}}(t)=at^2+bt+c.$$

Для цепи n-го порядка после определения вида принужденной реакции записывается система n уравнений относительно независимых переменных — токов в индуктивностях и напряжений на емкостях для времени переходного процесса $t\geqslant+0$:

$$\vec{a}\vec{i}=\vec{e}. \quad (1)$$

Определяются начальные значения указанных переменных и $n-1$ их первых производных. По главному определителю составляется характеристическое уравнение и находятся его корни. Далее порядок вычисления различен в зависимости от совпадения или несовпадения функций свободной и принужденной реакции. Если эти функции не совпадают, то принужденная реакция определяется независимо подстановкой функции принужденной реакции в систему уравнений (1):

$$\vec{a}\,\vec{i}_{\text{пр}}=\vec{e}. \quad (2)$$

Приравнивая в полученной системе (2) коэффициенты при одинаковых функциях в обеих частях равенства (функциональный баланс), получаем линейную алгебраическую систему уравнений относительно неизвестных постоянных d принужденной реакции

$$\vec{a}_1\,\vec{d}=\vec{e}_1, \quad (3)$$

из которой эти постоянные определяются. Наконец, постоянные свободной реакции находятся по начальным значениям как обычно в классическом методе.

Если же какая-либо функция возмущения совпадает с функцией свободной реакции, то это равносильно появлению (дополнительного) кратного корня. Тогда выделить принужденную реакцию не представляется возможным, постоянные принужденной и свободной реакции определяются совместно как в случае кратных корней. Но и в этом случае подстановка в систему (1) суммы связанных кратностью корня слагаемых принужденного и свободного решения дает недостающие линейные алгебраические уравнения для совместного определения постоянных свободного и принужденного решения.

Пример. В цепь (рис. 1) включаются в момент $t=0$ источник линейной э. д. с. $e(t)=Et$ и источник экспоненциального тока $I(t)=Ie^{-\alpha t}$. Определить токи и напряжения переходного процесса.

Будем искать вначале независимые величины $i_L(t)=i$ и $u_c(t)=u$. Принужденные составляющие решения от действия э. д. с. и источника тока будем находить по методу наложения.

Принужденные от действия э. д. с. имеют вид

$$i^e_{\text{пр}}=At+B; \qquad u^e_{\text{пр}}=Dt+F;$$

принужденные от источника тока

$$i^I_{\text{пр}}=Me^{-\alpha t}, \quad u^I_{\text{пр}}=Ne^{-\alpha t}.$$

Составляем систему уравнений для послекоммутационной схемы и исключаем из нее зависимую величину i_R по уравнению для узла

$$i_R = i + C\frac{du}{dt} - I(t).$$

В результате получим систему уравнений относительно независимых величин ($i = i_L$, $u = u_c$):

$$\left.\begin{aligned} &(R+r)i + L\frac{di}{dt} + RC\frac{du}{dt} = e(t) + RI(t), \\ &-ri - L\frac{di}{dt} + u = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

Начальные независимые величины находим из докоммутационной схемы: $i(0)=0$, $u(0)=0$. Подставляя эти значения и $t=0$ в систему (*), находим начальные значения производных: $i'(0)=0$, $u'(0)=I/C$.

Характеристическое уравнение получаем, приравнивая нулю главный определитель системы (*)

$$\begin{vmatrix} R+r+Lp, & RCp \\ -r-Lp, & 1 \end{vmatrix} = 0, (R+r+Lp)\cdot 1 + (r+Lp)RCp = 0.$$

Из последнего определяем корни P_1 и P_2.

Свободные составляющие при различных корнях имеют вид

$$i_{св}(t) = A_1 e^{P_1 t} + A_2 e^{P_2 t},$$
$$u_{св}(t) = B_1 e^{P_1 t} + B_2 e^{P_2 t};$$

при кратных корнях $P_1 = P_2 = -a$:

$$i_{св}(t) = (A_3 + A_4 t)e^{-at};$$
$$u_{св}(t) = (B_3 + B_4 t)e^{-at}.$$

Принужденные от э. д. с. (линейные функции) не совпадают со свободными функциями (экспонентами), поэтому их можно находить независимо подстановкой этих принужденных в систему (*):

$$(R+r)(At+B) + L\frac{d}{dt}(At+B) + RC\frac{d}{dt}(Dt+F) = Et;$$

$$-r(At+B) - L\frac{d}{dt}(At+B) + Dt + F = 0.$$

Методом функционального баланса (приравнивая коэффициенты при одинаковых функциях) получаем из последней системы алгебраическую линейную систему (**) относительно постоянных принужденного решения A, B, D, F и определяем эти постоянные.

$$\left.\begin{aligned} t &\begin{cases} (R+r)A = E, \\ -rA + D = 0, \end{cases} \\ t^\circ &\begin{cases} (R+r)B + LA + RCD = 0, \\ -rB - LA + F = 0. \end{cases} \end{aligned}\right\} \qquad (**)$$

Принужденные от экспоненциального источника тока в случае несовпадения корней p_1 и p_2 свободного режима с показателем $-\alpha$ вынуждающей функции источника тока находятся независимо от постоянных свободного решения. При этом можно использовать систему (*) и названный универсальный метод функционального баланса:

$$(R+r)Me^{-\alpha t}+L\frac{d}{dt}(Me^{-\alpha t})+RC\frac{d}{dt}(Ne^{-\alpha t})=R\cdot Ie^{-\alpha t};$$

$$-rMe^{-\alpha t}-L\frac{d}{dt}(Me^{-\alpha t})+Ne^{-\alpha t}=0.$$

Откуда получаем алгебраическую систему относительно M и N:

$$(R+r-\alpha L)M-\alpha RCN=RI;$$

$$(-r+\alpha L)M+N=0,$$

и определяем эти постоянные.

Однако для определения принужденной экспоненциальной реакции (при неравенстве показателя $s=-\alpha$ корням p_1 и p_2) можно воспользоваться хорошо разработанными методами расчета цепей постоянного тока. Поскольку для постоянного тока, комплексного гармонического и экспоненциального тока базовой функцией является экспонента, то для этих токов одинаково применимы общие методы расчета, теория четырехполюсников, понятие передаточной (системной) функции и т. д. [1, 2].

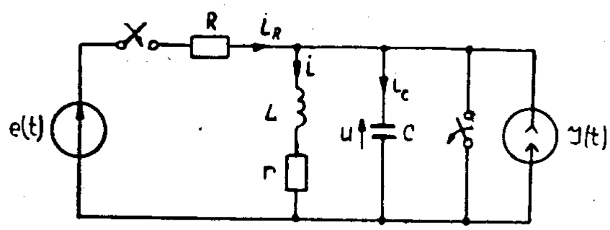

Рис. 1.

Полагая, что в цепи рис. 1 действует только экспоненциальный источник тока $I(t)=Ie^{-\alpha}$, рассчитаем принужденный режим методом узловых напряжений.

Напряжение между узлами, равное напряжению на конденсаторе,

$$N=U_c(-\alpha)=\frac{I}{\frac{1}{R}+\frac{1}{r-\alpha L}-\alpha C}.$$

Ток индуктивности

$$M=I_L(-\alpha)=\frac{N}{r-\alpha L}.$$

Здесь использованы понятия сопротивлений резистора, индуктивности и емкости для экспоненциального воздействия (R, sL, $1/sC$, $s=$ $=-\alpha$).

Нетрудно убедиться, что результат по методу узловых напряжений совпадает с результатом решения предыдущей системы метода функционального баланса.

Определив таким образом обе принужденные составляющие — линейную и экспоненциальную, далее определяем постоянные свободного режима обычным для классического метода путем через начальные значения величин и их производных.

Рассмотрим теперь случаи совпадения принужденной и свободной экспоненциальных функций.

Если $p_2 \neq p_1 = -\alpha$, то связанными являются свободная составляющая от корня p_1 и принужденная от экспоненциального тока. Их постоянные следует находить совместно:

$$i(p_1, \alpha) = (A_1 + A_3 t) e^{-\alpha t};$$
$$u(p_1, \alpha) = (B_1 + B_3 t) e^{-\alpha t}.$$

Подставляя эти значения в систему (*), сохранив в правой части последней только $RI(t)$, и составляя баланс коэффициентов для функции $e^{-\alpha t}$, получим два дополнительных уравнения относительно постоянных A_1, A_3, B_1, B_3:

$$(R + r - \alpha L) A_1 - \alpha RCB_1 + LA_3 + RCB_3 = RI,$$
$$-(r - \alpha L) A_1 + B_1 - LA_3 = 0.$$

Остальные четыре уравнения относительно постоянных A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3 получаются из начальных условий для независимых величин

$$i(t) = At + B + (A_1 + A_3 t) e^{-\alpha t} + A_2 e^{p_2 t};$$
$$u(t) = Dt + F + (B_1 + B_3 t) e^{-\alpha t} + B_2 e^{p_2 t}$$

и их производных.

Если же оба корня совпадают с показателем экспоненциального источника тока $p_1 = p_2 = -\alpha$, то все три экспоненциальных слагаемых оказываются связанными

$$i(p_1, p_2, \alpha) = (A_1 + A_2 t + A_3 t^2) e^{-\alpha t};$$
$$u(p_1, p_2\ \alpha) = (B_1 + B_2 t + B_3 t^2) e^{-\alpha t}.$$

Подстановка этих значений в систему (*) и последующий баланс для $e^{-\alpha t}$ дает два уравнения относительно постоянных интегрированич

$$(R + r - \alpha L) A_1 - \alpha RCB_1 + LA_2 + RCB_2 = RI;$$
$$-(r - \alpha L) A_1 + B_1 - LA_2 = 0.$$

Остальные четыре уравнения, как и в предыдущем случае, получаются из начальных условий для тока $i = i_{\text{пр}} + i_{\text{св}}$ и напряжения $u = u_{\text{пр}} + u_{\text{св}}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. К. М. Поливанов. Теоретические основы электротехники. Т. 1, «Энергия», 1972.
2. Ф. Реза и С. Сили. Современный анализ электрических цепей. «Энергия», 1964.