

ПРИБЛИЖЕННЫЙ РАСЧЕТ ЕМКОСТИ НЕКОТОРЫХ ЦЕНТРИРОВАННЫХ СИСТЕМ

В. А. ЛУКУТИН, В. С. СОКОЛОВ, П. П. ГАЛИНСКИЙ

(Представлена научным семинаром кафедры теоретических основ электротехники)

Точный аналитический расчет емкости и проводимости центрированных систем из двух электродов возможен для весьма ограниченного числа случаев, например:

- 1) сферический конденсатор,
- 2) конденсатор, образованный софокусными эллипсоидами вращения,
- 3) цилиндрический конденсатор,
- 4) конденсатор, образованный софокусными эллиптическими цилиндрами, и др.

Однако в практике встречается ряд других центрированных систем, для которых точное аналитическое решение отсутствует или сопряжено с большими математическими трудностями.

При проектировании электротехнических устройств и предварительных расчетах создание модели для непосредственного измерения емкости (проводимости) или моделирования в электрической ванне в ряде случаев нецелесообразно, так как связано с большой затратой труда и времени. В то же время большой точности на этой стадии проектирования может и не потребоваться. Для этой цели желательно иметь приближенные формулы для часто встречающихся на практике конфигураций электродов.

Ниже рассматривается одна из центрированных систем, состоящая из шины прямоугольного сечения ($2a \times 2b$), помещенной внутри кругового цилиндра радиуса R .

Длину системы l принимаем достаточно большой сравнительно с радиусом внешнего цилиндра R , так что краевым эффектом пренебрегаем и считаем поле плоскопараллельным.

Очевидно, что для каждой системы электродов, а в частности для центрированных цилиндров рис. 1, можно подобрать такие цилиндрические, эллиптические, плоские и др. конденсаторы, емкость которых равна емкости рассматриваемой системы.

При построении эскизных картин поля выяснилось, что форма сечения внутреннего электрода незначительно влияет на емкость системы, если периметр его сечения остается неизменным. Особенно четко эта особенность проявляется, если $R \geq 3R_1$, где $R_1 = \sqrt{A^2 + B^2}$ — радиус окружности, в которую вписывается сечение внутреннего электрода.

В качестве эквивалентного конденсатора, к которому приводится заданная система, был принят софокусный эллиптический конденсатор.

Его емкость определяется [1] формулой

$$C = \frac{2\pi\epsilon_a}{\ln \frac{a_2 + b_2}{a_1 + b_1}}, \quad (1)$$

где a_1, b_1 и a_2, b_2 — полуоси сечений внутреннего и наружного эллиптических электродов.

При $a_2 \geq 3a_1$ форма сечения внешнего эллиптического электрода очень близка к окружности.

При $b_1 = 0$ сечение внутреннего электрода вырождается в линию длиной $2a_1$.

В этом самом неблагоприятном случае отклонение формы сечения внешнего электрода от окружности, определяемое выражением

$$\delta = \frac{a_2 - b_2}{a_2} \cdot 100\%,$$

составляет около 6%.

При увеличении b_1 от 0 до a_1 отклонение δ уменьшается.

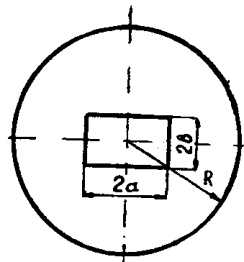


Рис. 1.

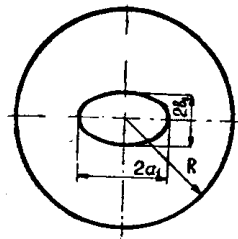


Рис. 2.

Таким образом, во всех дальнейших расчетах внешний электрод считаем круговым цилиндром, то есть $a_2 = b_2 = R$.

Заменяем внутренний электрод прямоугольного сечения ($2a \times 2b$) эллиптическим цилиндром с полуосями a_1 и b_1 , периметр сечения которого равен периметру прямоугольника, а отношение полуосей равно отношению сторон прямоугольника.

Получаем уравнения

$$4(a+b) = L_3; \quad (2)$$

$$\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1}, \quad (3)$$

где L_3 — периметр эллипса, определяемый приближенной формулой

$$L_3 = \pi \cdot [1,5 \cdot (a_1 + b_1) - \sqrt{a_1 \cdot b_1}]. \quad (4)$$

Подставляя выражение для L_3 в уравнение (2) и решая систему относительно искомых полуосей a_1 и b_1 , получаем

$$a_1 = \frac{4(a+b)}{\pi[1,5(1+\lambda) - \sqrt{\lambda}]};$$

$$b_1 = \frac{4(a+b) \cdot \lambda}{\pi[1,5(1+\lambda) - \sqrt{\lambda}]},$$

где

$$\lambda = \frac{b}{a}.$$

Подставляя значения a_1 и b_1 в формулу (1), получим приближенное выражение для емкости цилиндров, рис. 1, для заданных соотношений габаритов ($R \geq 3a$):

$$C \approx \frac{2\pi\varepsilon_a}{\ln \frac{\pi R[1,5(1+\lambda) - \sqrt{\lambda}]}{2(a+b)(1+\lambda)}} = \frac{2\pi\varepsilon_a}{\ln \left[\frac{\pi R}{2(a+b)} \left(1,5 - \frac{\sqrt{\lambda}}{1+\lambda} \right) \right]}. \quad (5)$$

Если $b=a$, $\lambda=1$, то есть внутренний электрод представляет собой квадрат со стороной $2a$, то формула емкости значительно упрощается:

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_a}{\ln \frac{\pi \cdot R}{4a}}.$$

Экспериментальная проверка результатов расчета в электролитической ванне показала достаточно хорошее совпадение экспериментальных и расчетных данных.

При $\sqrt{a^2+b^2} \leq 0,9R$ максимальная относительная погрешность не превышала 7%, причем с уменьшением отношения $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{R}$ относительная погрешность уменьшается.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Бухгольц. Расчет электрических и магнитных полей. М., ИЛ, 1961.
2. И. Н. Бронштейн и К. А. Семендяев. Справочник по математике. М., Госиздат. техн.-теор. лит., 1953.