

РАСЧЕТ МАГНИТНОГО ПОЛЯ, СОЗДАННОГО ПРОВОДНИКОМ С ТОКОМ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ПАЗУ

В. А. ЛУКУТИН

(Представлена научным семинаром кафедры теоретических основ электротехники)

Определение электродинамических усилий в обмотках трансформаторов и электрических машин, а также вычисление индуктивностей рассеяния этих обмоток в конечном итоге сводится к расчету магнитного поля, созданного прямолинейным проводником с током, помещенным в паз прямоугольного сечения. Подобные расчеты весьма распространены в инженерной практике, поэтому этот вопрос часто освещался в литературе [2, 3, 4].

Обычно поле сводят к двумерному, для чего цилиндрическую обмотку трансформаторов разворачивают в прямолинейную полосу и счи-

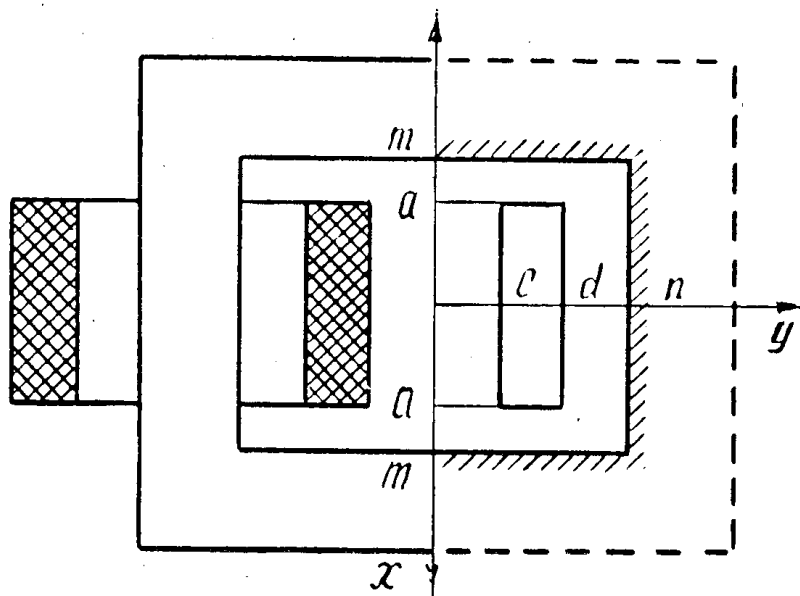


Рис. 1.

тают, что поверхности ферромагнитных стержней представляют плоскости, ограничивающие с трех сторон расчетную область. На рис. 1. показан однофазный трансформатор с двумя обмотками, причем на правой половине этого рисунка представлена расчетная область, границы которой заштрихованы. В области помещена обмотка, сечение

которой представляется прямоугольником со сторонами $2a$ и $(d-c)$, а намагничивающая сила ее равна Iw .

Заметим, что такая же область получается и при исследовании поля проводников с током, размещенных в пазах ротора или статора электрической машины. В этом случае ферромагнитные стенки пазов спрямлены, а выпучиванием потока пренебрегаем.

Учет влияния ферромагнитных границ принуждает применять метод зеркальных отображений, что приводит к громоздкому решению в виде бесконечного ряда, весьма неудобному для инженерных целей [2]. В связи с этим используют приближенные решения, существенно упрощая задачу, но проигрывая при этом в точности [3].

Ниже показана возможность получения приближенного аналитического выражения для векторного потенциала в области, показанной на рис. 1, используя прямой вариационный метод Канторовича [1].

Известно, что поле в области удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = -\mu \delta(x, y). \quad (1)$$

Здесь δ — плотность тока в сечении обмотки,

A — векторный магнитный потенциал.

Если допустить, что ферромагнитная среда, окружающая область, имеет $\mu = \infty$, то граничные условия будут такие:

$$B_x = \frac{\partial A}{\partial y} = 0, \quad \text{при } y = n \quad (2)$$

$$B_y = -\frac{\partial A}{\partial x} = 0, \quad \text{при } y = 0 \text{ и } x = \pm m.$$

Решение задачи будем искать в виде одного слагаемого, представляющего собою произведение двух функций, одну из которых выбираем произвольно. Эта функция должна удовлетворять граничным условиям (2) и быть, по крайней мере, дважды дифференцируемой. Можно записать, учитывая симметрию поля, следующее решение поставленной задачи:

$$A(x, y) = \varphi(x)f(y), \quad (3)$$

где $\varphi(x) = m^2 - x^2 + \frac{x^4}{2m^2}$ — произвольно выбранная функция, а $f(y)$ — неизвестная функция, которую нужно определить.

Подставим выбранное решение в функционал [1]

$$J = \iint \left[\left(\frac{\partial A}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial y} \right)^2 - 2\mu \delta A \right] dx dy. \quad (4)$$

и выполним интегрирование по одной переменной в пределах от $x = -m$ до $x = m$, причем следует учитывать, что $\delta = 0$ при $|x| > a$.

Выполнив все необходимые вычисления, получим

$$J = \int F(f', f, y) dy,$$

$$F = 0,609 f^2(y) + 1,237 m^5 f^{12}(y) - 0,133 \mu \delta(y) f(y) \left(30 m^2 a - 10 a^3 \frac{3 a^5}{m^2} \right). \quad (5)$$

Теперь воспользуемся уравнением Эйлера [1]

$$\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial f'} = 0 \quad (6)$$

и, подставив в него (5), получаем следующее дифференциальное уравнение:

$$f''(y) - \frac{0,493}{m^2} f(y) = -\mu \delta(y) \frac{0,539}{m^5} \left(30 m^2 a - 10 a^3 + \frac{3 a^5}{m^2} \right). \quad (7)$$

Общее решение (7) запишется так:

$$f_1(y) = K_1 e^{p_1 y} + K_2 e^{p_2 y}, \quad (8)$$

где

$$p_1 = \frac{0,702}{m}, \quad p_2 = -\frac{0,702}{m}.$$

В правой части уравнения (7) стоит функция распределения плотности тока, которую можно аппроксимировать степенным рядом

$$\delta(y) = \frac{I\omega}{2a(d-c)} (D_1 y + D_3 y^3 + \dots + D_k y^k + \dots).$$

Если ограничиться первыми тремя слагаемыми ряда, то частное решение уравнения (7) запишется таким образом:

$$f_2(y) = C_1 y + C_3 y^3 + C_5 y^5. \quad (9)$$

Постоянные интегрирования K_1 и K_2 определяются выбором начальной силовой линии. Полагая $A=0$ при $y=0$, из (8, 9) получаем

$$0 = f_1(0) + f_2(0) = K_1 + K_2. \quad (10)$$

Если воспользоваться граничным условием $\frac{\partial A}{\partial y} = 0$ при $y=n$, то можно определить

$$K_1 = -K_2 = -\frac{m(C_1 + 3C_3 n^2 + 5C_5 n^4)}{1,404 \operatorname{Ch} p_1}. \quad (11)$$

Коэффициенты C_k находятся подстановкой частного решения $f_2(y)$ в дифференциальное уравнение (7):

$$\begin{aligned} 6 C_3 y + 20 C_5 y^3 - \frac{0,493}{m^2} (C_1 y + C_3 y^3 + C_5 y^5) &= \\ &= -\mu \delta_0 \frac{0,0539}{m^5} (D_1 y + D_3 y^3 + D_5 y^5) \cdot b. \end{aligned}$$

Приравниваем множители при одинаковых степенях y в последнем равенстве и получаем формулы для нахождения C_k :

$$\begin{aligned}
C_1 &= \frac{\mu \delta_0 b}{m^3} (0,109 D_1 + m^2 1,33 D_3 + m^4 53,9 D_5); \\
C_3 &= \frac{\mu \delta_0 b}{m^3} (0,109 D_3 + m^2 4,43 D_5); \\
C_5 &= \frac{\mu \delta_0 b}{m^3} D_5; \quad \delta_0 = \frac{l \tau}{2 a(d-c)}; \\
b &= 30 m^2 a - 10 a^3 + \frac{3 a^5}{m^2}.
\end{aligned} \tag{12}$$

Теперь можно подставить найденные коэффициенты в наше решение. В общем виде оно имеет вид

$$\begin{aligned}
A(x, y) &= \left(m^2 - x^2 + \frac{x^4}{2m^2} \right) \left[C_1 y + C_3 y^3 + C_5 y^5 - \right. \\
&\quad \left. - \frac{m(C_1 + 3C_3 n^2 + 5C_5 n^4)}{0,702 \operatorname{Ch} p_1} \cdot \operatorname{Sh} \frac{0,702 y}{m} \right].
\end{aligned} \tag{13}$$

Эта формула удобна для расчетов, она позволяет легко находить составляющие магнитной индукции в любой точке пространства по формулам

$$B_x = \frac{\partial A}{\partial y}; \quad B_y = - \frac{\partial A}{\partial x}. \tag{14}$$

В ряде задач наибольший интерес представляет радиальная (B_y) составляющая магнитной индукции. В этом случае целесообразно задаваться в решении (3) функцией $f(y)$, а вычислять указанным путем $\varphi(x)$, что позволит получить более точные результаты.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. В. Канторович, В. И. Крылов. Приближенные методы высшего анализа. М., Госиздат. техн.-теор. лит., 1949.
2. К. Бинс, П. Лауренсон. Анализ и расчет электрических и магнитных полей. «Энергия», 1970.
3. Г. Н. Петров, И. С. Наяшков. Электродинамические силы в трансформаторах. «Электричество», 1955, № 8.
4. Д. Н. Морозов. Трансформаторы. М., Госэнергоиздат, 1962.