

## КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ В ОБЛАСТЯХ НЕУСТОЙЧИВОСТИ НЕЧЕТНОГО ПОРЯДКА

Р. А. ВАЙНШТЕЙН, Н. В. КОЛОМИЕЦ

(Представлена научным семинаром кафедры электрических станций)

Известно, что в нелинейных системах с периодически изменяющимся энергоемким параметром могут иметь место разнообразные колебательные процессы. Одним из важнейших свойств таких систем является то, что в них при определенных условиях возникают колебания различных частот при неизменной частоте вынуждающей силы. Некоторые режимы, например, деление частоты на два, повторение частоты довольно хорошо изучены [1—3] и нашли широкое применение на практике. Режимы, при которых возникают колебания более высоких частот, изучены меньше, хотя и они могут иметь полезное применение.

В данной статье рассматриваются колебания на нечетных гармониках в схеме индуктивного параметрона без подмагничивания постоянным током, показанного на рис. 1. Индуктивный параметрон состоит

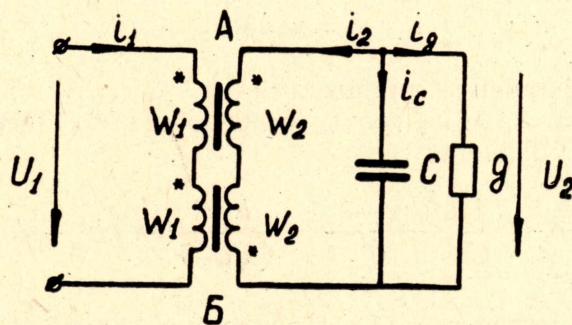


Рис. 1. Принципиальная схема индуктивного параметрона.

из двух одинаковых трансформаторов на замкнутых ферромагнитных сердечниках (А и Б). Обмотки с числом витков  $\omega_1$ , называемые обмотками возбуждения, и обмотки с числом витков  $\omega_2$  — контурные соединены так, чтобы между ними не было электромагнитной связи. При питании обмотки возбуждения синусоидальным напряжением частотой  $\omega$  в колебательном контуре, образованном обмотками  $\omega_2$  и емкостью С, могут возникать параметрические колебания с частотами, кратными  $\omega$ .

Параметрические колебания с частотой, равной  $\omega$ , рассматриваются в работах [2, 4] и др. В работе [2] достаточно полно проведены теоретические и экспериментальные исследования этих колебаний. О парамет-

рических колебаниях с частотой больше  $\omega$  известны лишь некоторые экспериментальные данные. Ниже получены некоторые соотношения для анализа параметрических колебаний с частотами  $n\omega$ , где  $n$  — нечетное целое число.

Индукцию в сердечниках А и Б в стационарном режиме зададим в виде

$$\begin{aligned} b_A &= B_1 \sin \omega t + B_n \sin(n\omega t + \psi); \\ b_B &= B_1 \sin(\omega t + \varphi) - B_n \sin(n\omega t + \psi); \end{aligned} \quad (1)$$

где  $B_1$  — амплитуда индукции первой гармоники;

$B_n$  — амплитуда индукции  $n$ -й гармоники.

Для составления дифференциального уравнения колебательного контура запишем систему уравнений для схемы рис. 1:

$$\begin{aligned} i_2 + i_c + i_g &= 0; \\ i_1 \omega_1 + i_2 \omega_2 &= h_A l_{cp}; \\ i_1 \omega_1 - i_2 \omega_2 &= h_B l_{cp}; \end{aligned} \quad (2)$$

$$i_c = C \frac{dU_2}{dt};$$

$$i_g = gU_2;$$

$$U_2 = q\omega_2 \frac{d(b_A - b_B)}{dt};$$

где  $l_{cp}$  — длина средней магнитной линии сердечника;

$q$  — площадь поперечного сечения сердечника;

$h_A$  и  $h_B$  — напряженности магнитного поля в сердечниках. Остальные обозначения ясны из рисунка.

Кривую намагничивания аппроксимируем выражением

$$h = \alpha sh\beta b, \quad (3)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  — коэффициенты аппроксимации.

Подставляя вместо  $h_A$  и  $h_B$  соответственно  $\alpha sh\beta b_A$  и  $\alpha sh\beta b_B$  и используя (2), получим уравнение

$$\frac{d^2(b_A - b_B)}{dt^2} + g \frac{1}{C} \frac{d(b_A - b_B)}{dt} + \frac{l_{cp} \alpha}{2 q \omega_2^2 C} (sh \beta b_A - sh \beta b_B) = 0. \quad (4)$$

В уравнение (4) подставим (1) и разложим гиперболический синус от периодического аргумента в ряд Фурье, коэффициентами которого, как известно, являются функции Бесселя от чисто мнимого аргумента.

Пренебрегаем слагаемыми, содержащими функции Бесселя выше  $n$ -го порядка, и после отделения в уравнении (4) косинусной и синусной составляющих получим

для первой гармоники

$$[-jI_1(j\beta B_n)]I_{n-1}(j\beta B_1) \cos(n-1) \frac{\varphi}{2} \cos\left(\psi - \frac{n\varphi}{2}\right) = -kB_1 \sin \frac{\varphi}{2} g, \quad (5)$$

$$[-jI_1(j\beta B_n)]I_{n-1}(j\beta B_1) \cos(n-1) \frac{\varphi}{2} \sin\left(\psi - \frac{n\varphi}{2}\right) -$$

$$-[-jI_1(j\beta B_1)]I_0(j\beta B_n)\sin\frac{\varphi}{2}=-kB_1\sin\frac{\varphi}{2}\omega C; \quad (6)$$

для  $n$ -й гармоники

$$jI_n(j\beta B_1)[I_0(j\beta B_n)+I_2(j\beta B_n)]\sin\frac{n\varphi}{2}\cos\left(\psi-\frac{n\varphi}{2}\right)=-nkB_n g, \quad (7)$$

$$jI_n(j\beta B_1)[I_0(j\beta B_n)-I_2(j\beta B_n)]\sin\frac{n\varphi}{2}\sin\left(\psi-\frac{n\varphi}{2}\right)+ \\ +I_0(j\beta B_1)[-jI_1(j\beta B_n)]=nkB_n n\omega C; \quad (8)$$

$$\text{где } K=\frac{\omega\omega_2^2 q}{\alpha I_{cp}};$$

$I$  — функция Бесселя.

Работу индуктивного параметрона рассматриваем в режиме холостого хода, активными потерями пренебрегаем, то есть  $g=0$ .

При этом из уравнений (5) и (7) следует

$$\psi=\frac{n\varphi}{2}=\frac{\pi}{2}. \quad (9)$$

Для определения амплитуды  $n$ -й гармоники выражение (8) преобразуем, используя известное соотношение между функциями Бесселя

$$I_{\nu-1}(x)-I_{\nu+1}(x)=\frac{2\nu}{x}I_{\nu}(x).$$

Затем разложим функцию Бесселя первого порядка в степенной ряд и ограничимся первым членом, содержащим аргумент в первой степени. После этих преобразований с учетом (9) получим

$$B_n=\frac{2jI_n(j\beta B_1)}{2n^2k\omega C-\beta I_0(j\beta B_1)}\sin\frac{n\varphi}{2}. \quad (10)$$

Коэффициент, стоящий перед  $\frac{n\varphi}{2}$ , представляет собой максимально возможное значение амплитуды  $n$ -й гармоники.

Как будет показано ниже, выражение (10) хорошо отображает характер зависимости амплитуды  $B_n$  от угла  $\varphi$ . Однако расчет абсолютных значений амплитуд по этому выражению дает значения, сильно отличающиеся от действительных из-за сделанных допущений. Поэтому для определения максимальной амплитуды  $n$ -й гармоники в первом приближении положим, что ток  $i_1$  в цепи возбуждения на границе возникновения колебаний синусоидальный.

Индукцию в сердечнике примем

$$b=B_1\sin\omega t+B_n\sin n\omega t. \quad (11)$$

Поскольку сердечники находятся в одинаковых условиях, так как колебания в контуре еще не существуют, то индукции первой и  $n$ -й гармоник в обоих сердечниках равны по величине и совпадают по фазе. Как только возникнут колебания, произойдет сдвиг фаз между первыми гармониками индукций в сердечниках на угол  $\varphi$ , предельное значение которого, как следует из (10), равно  $\frac{\pi}{n}$ . Индукции  $n$ -й гар-

моники при  $\varphi = \frac{\pi}{n}$  сдвинутся по фазе относительно друг друга на угол  $\pi$ . Величина напряжения  $n$ -й гармоники на колебательном контуре примет при этом свое максимально возможное значение, которое будет определяться удвоенным значением амплитуды индукции  $n$ -й гармоники на границе возбуждения параметрических колебаний.

Для определения  $B_{n \max}$  в (3) подставим (11). После несложных преобразований и разложения гиперболического синуса в ряд Фурье из уравнения  $H_n = 0$  получим выражение для максимального значения амплитуды  $n$ -й гармоники

$$B_{n \max} = \frac{2 j I_n(j \beta B_1)}{\beta I_0(j \beta B_1)}. \quad (12)$$

Подставив в (10) выражение (12), получим окончательно

$$B_n = \frac{2 j I_n(j \beta B_1)}{\beta I_0(j \beta B_1)} \sin \frac{n \varphi}{2}. \quad (13)$$

Возможность определения  $B_{n \max}$  таким приближенным способом объясняется следующими факторами:

1) амплитуды индукций первой гармоники равны и практически остаются постоянными по величине на границе возбуждения и во всей области существования параметрических колебаний;

2) амплитуда индукции  $n$ -й гармоники много меньше амплитуды индукции первой гармоники.

Для определения амплитуды первой гармоники при каждом значении  $n$  рассмотрим устойчивость нулевого решения уравнения (4). Составим дифференциальное уравнение в вариациях. Индукцию в сердечниках перед возникновением колебаний примем

$$b = B_m \sin \omega t. \quad (14)$$

Пусть в колебательном контуре появляется дифференциально малый ток  $\Delta i$ , тогда индукции в сердечниках А и Б будут равны

$$b_A = b + \Delta b; \quad (15)$$

$$b_B = b - \Delta b;$$

где  $\Delta b$  — малые вариации индукции относительно режима (14). Дифференциальное уравнение колебательного контура при неучете потерь и использовании выражений (3) и (15) примет вид

$$\frac{d^2 \Delta b}{d \tau^2} + \frac{\alpha \beta l_{cp}}{2 q \omega_2^2 \omega^2 C} \operatorname{ch} \beta b \Delta b = 0, \quad (16)$$

где  $\tau = \omega t$ .

После подстановки (14) в (16) и разложения функции  $\operatorname{ch} \beta B_m \sin \omega t$  в ряд Фурье получим уравнение Хилла

$$\frac{d^2 \Delta b}{d \tau^2} + \left( \Omega_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \Omega_k \cos 2 k \omega t \right) \Delta b = 0, \quad (17)$$

где  $\Omega_0$  и  $2\Omega_k$  — постоянная составляющая и  $k$ -я гармоника тригонометрического полинома в уравнении (17).

Далее нам необходимо знать только выражение для

$$\Omega_0 = \frac{\alpha\beta l_{cp}}{2q\omega_2^2\omega^2 C} I_0(j\beta B_1), \quad (18)$$

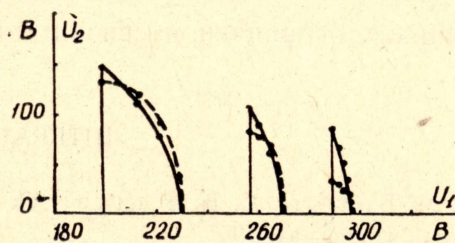
так как ограничиваемся нулевым приближением условия устойчивости

$$\Omega_0 = n^2. \quad (19)$$

Подставляя (18) в (19), имеем

$$\frac{\alpha\beta l_{cp}}{2q\omega_2^2\omega^2 C} I_0(j\beta B_1) = n^2. \quad (20)$$

Из (20) можно определить графически амплитуду первой гармоники на границе возникновения колебаний с частотой  $n\omega$ .



а)

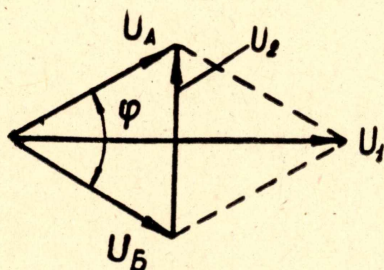
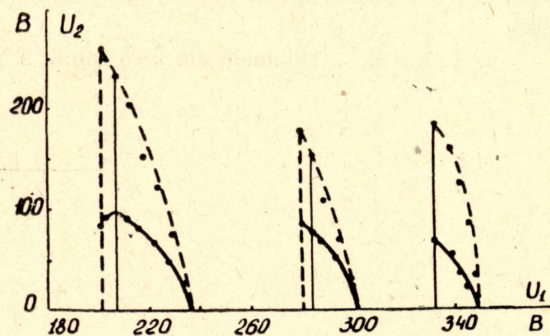


Рис. 2. Векторная диаграмма напряжений по первой гармонике.



б)

Рис. 3. Расчетные (а) и экспериментальные (б) зависимости напряжений на колебательном контуре от входного напряжения: — напряжение на колебательном контуре с частотой  $\omega$ ; — — — то же с частотой  $n\omega$ .

Зависимость между входным напряжением  $U_1$  и напряжениями на колебательном контуре  $U_2$  с частотами  $\omega$  и  $n\omega$  найдем, используя (13), (20), а также на основании векторной диаграммы напряжений для первой гармоники, показанной на рис. 2, варьируя  $\varphi$

$$U_1 = 2q\omega\omega_1 B_1 \cos\varphi/2; \quad (21)$$

$$U_{2(1)} = 2q\omega\omega_2 B_1 \sin\varphi/2; \quad (22)$$

$$U_{2(n)} = 2qn\omega\omega_2 B_n \sin\frac{n\varphi}{2}. \quad (23)$$

На рис 3а и б представлены расчетные и экспериментальные данные для схемы со следующими параметрами:  $q_{ст} = 5 \cdot 10^{-4} M^2$ ;

$$l_{ср} = 0,306 м; \omega_1 = 570; \omega_2 = 725; C = 0,5 мкФ; \beta = 4,8; \alpha = 2,06.$$

Расчеты и эксперименты проведены для параметрических колебаний с частотами  $3\omega$ ,  $5\omega$ ,  $7\omega$ .

### Выводы

1. Полученные соотношения дают качественно сходную с действительными процессами картину.

2. Проведенный анализ позволил вскрыть наиболее существенную сторону рассматриваемых колебаний, заключающуюся в том, что максимально возможный сдвиг фаз между первыми гармониками индукций в сердечниках ограничен и связан с порядком колебаний как  $\frac{\pi}{n}$ .

### ЛИТЕРАТУРА

1. А. М. Бамдас, С. В. Шапиро, Л. Н. Давыдова. Ферромагнитные делители частоты. «Энергия», 1967.
2. Л. А. Бессонов. Нелинейные электрические цепи. «Высшая школа», 1964.
3. И. Н. Лисицкая, Л. А. Синицкий, Ю. М. Шумков. Анализ электрических цепей с магнитными и полупроводниковыми элементами. Киев, «Наукова думка», 1969.
4. Т. Хаяси. Нелинейные колебания в физических системах. «Мир», 1968.