

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ РАДИОМЕТРИЧЕСКОГО ИЗОТОПНОГО ДЕФЕКТΟΣКОПА

В. И. ГОРБУНОВ, Ф. М. ЗАВЬЯЛКИН, М. С. КВАСНИЦА

(Представлена научным семинаром научно-исследовательского института
электронной интроскопии)

Одним из возможных направлений повышения качества функционирования радиометрических приборов является использование при их разработке методов теории статистических решений, в частности, оптимального синтеза систем изотопной дефектоскопии. В данном случае наряду с обнаружением сигнала (дефекта) необходимо также решать задачу оценки его основных параметров (например, объема). Спецификой данного круга вопросов является неопределенность формы полезного сигнала. Следовательно, при решении задачи оценки и обнаружения необходимо выделить из множества всевозможных сигналов такой класс сигналов, в котором можно установить их общие признаки. Качество функционирования системы и ее структура зависят от формы сигнала. Это означает, что при выборе формы полезного сигнала необходимо учитывать устойчивость системы к малым изменениям формы сигнала. С другой стороны, необходимо выбирать такую форму сигнала, которая характеризовалась бы минимально возможным количеством, желательно интегральных, параметров.

Принимая во внимание вышесказанное, предлагаются следующие модельные представления и допущения.

1. Форма сигнала $s(t)$ аппроксимируется пуассоновской. Это допущение основывается на сравнимости длины коллимационного отверстия с протяженностью дефекта в направлении контроля, а также сравнимости времени прохождения дефекта в поле зрения детектора излучения с величиной, обратной полосе пропускания сглаживающего фильтра.

Нормируя сигнал $s(t)$ на интервале отбора данных $(0, T)$ и считая, что наиболее существенные части сигнала содержатся внутри интервала $(0, T)$, запишем функциональный вид сигнала $s(t)$

$$s(t) = \frac{4A}{a}(t - \tau) \exp\left(-\frac{t - a}{a}\right) 1(t - \tau), \quad (1)$$

где τ — момент появления сигнала.

Амплитуду A сигнала $s(t)$ можно считать случайной величиной, равномерно распределенной на интервале $(0, A_m)$. Параметр A может быть однозначно связан с объемом дефекта.

Величина a в уравнении (1), определяющая протяженность сигнала, является также случайной величиной и может быть связана однозначной зависимостью с протяженностью дефекта в направлении контроля. Однако вышеуказанная форма сигнала $s(t)$ наиболее справедли-

ва для локальных дефектов. Следовательно, параметр a в данной модели является нежелательным. Примем его распределение вероятностей равномерным на интервале $[a_0, ka_0]$, $k \geq 1$.

2. Момент появления τ сигнала $s(t)$ — также случайная величина, равномерно распределенная на интервале наблюдения $(0, T)$. Данное предположение можно обосновать следующим образом: частота появления дефектов в контролируемом изделии мала, то есть средний интервал времени между двумя сигналами значительно больше интервала $(0, T)$. Поток сигналов в этом случае можно представить пуассоновским. Тогда, пренебрегая вероятностью появления на интервале $(0, T)$ двух сигналов, τ имеет равномерное распределение плотности вероятностей.

3. Помеха $n(t)$ на выходе инерционной системы, описываемой линейным дифференциальным уравнением первого порядка, может быть представлена асимптотически нормальным процессом с ковариационной функцией

$$B(\tau) = \frac{\lambda_0 \gamma}{2} e^{-\gamma|\tau|}, \quad (2)$$

где λ_0 — интенсивность импульсов на выходе детектора излучения;
 γ — полоса пропускания инерционной системы.

Таким образом, наша задача заключается, при указанных модельных допущениях, в определении структуры устройства, оценивающего параметры A, τ , при использовании которых принимается решение о наличии или отсутствии дефекта, а также в оценке качества функционирования данной системы.

Принятое колебание $r(t)$ по обеим гипотезам запишется:

$$r(t) = \begin{cases} s(t) + n(t), & 0 \leq t \leq T: H_1 \\ n(t), & 0 \leq t \leq T: H_0 \end{cases}$$

Для нахождения оптимальной структуры системы обработки радиометрической информации используем непосредственный вывод ее на основе достаточной статистики r_1 [1]

$$r(t) = r_1 s(t) + y(t), \quad (3)$$

где r_1 — случайная величина, полученная посредством определяемых операций над $r(t)$;

r_1 и $y(t)$ — статистически независимы;

$y(t)$ не зависит от того, какая гипотеза справедлива.

Статистика r_1 определяется

$$r_1 = \int_0^T r(u) g(u) du. \quad (4)$$

Дальнейшая задача состоит в нахождении функции $g(t)$, обладающей требуемыми свойствами. Из выражений (3) и (4) получим

$$r(t) = \begin{cases} (s_1 + n_1) s(t) + y(t): H_1 \\ n_1 s(t) + y(t): H_0 \end{cases}$$

где

$$s_1 = \int_0^T A s(u) g(u) du, \quad (5)$$

$$n_1 = \int_0^T n(u) g(u) du. \quad (6)$$

Введем ограничение

$$1 = \int_0^T s(u) g(u) du. \quad (7)$$

Тогда из выражений (5) и (7) $s_1 = A$. Если n_1 — случайная величина с нулевым средним, то

$$n(t) = n_1 s(t) + y(t); \quad 0 \leq t \leq T.$$

Определим условие, которому должна удовлетворять функция $g(t)$, чтобы $n_1 y(t) = 0$ или $n_1 n(t) = n_1^2 s(t)$. Используя выражение (6), данное условие можно записать

$$\int_0^T B(t-u) g(u) du = s(t) \int_0^T \int_0^T B(\theta-u) g(\theta) g(u) du d\theta. \quad (8)$$

Равенство (8) выполняется, если

$$\int_0^T B(t-u) g(u) du = A s(t). \quad (9)$$

Таким образом, достаточная статистика r_1 получается посредством коррелирования $r(t)$ с $g(t)$. Структура системы обработки информации полностью определяется функцией $g(t)$, являющейся решением интегрального уравнения (9) и представляющей собой не что иное, как импульсную переходную функцию определяемой системы. Методы решения данного типа уравнений (уравнений Фредгольма первого рода) широко известны [2-3]. Общее решение уравнения (9) при $B(\tau)$, определяемой выражением (2), имеет вид

$$s(t) = \frac{A}{2\gamma^2} \left[-\frac{\partial^2 s(t)}{\partial t^2} + \gamma^2 s(t) \right] + C_1 \delta(t) + C_2 \delta(t-T), \quad (10)$$

где

$$C_1 = \frac{\gamma s(0) - s'(0)}{\gamma^2}; \quad C_2 = \frac{\gamma s(T) + s'(T)}{\gamma^2}.$$

Из выражения (1) следует, что $C_1 = C_2 = 0$. Пренебрегая членами второго порядка малости в выражении (10), получаем

$$g(t) = \frac{2A [2a - (t-\tau)]}{\gamma^2 a^5} \exp\left\{-\frac{t-\tau}{a}\right\} 1(t-\tau). \quad (11)$$

Оценим параметры A и τ сигнала $s(t)$. Логарифм функции правдоподобия в общем виде запишется

$$\ln \Phi[r(t)] = \int_0^T r(u) g(u) du - \frac{1}{2} \int_0^T s(u) g(u) du. \quad (12)$$

Усредненное отношение правдоподобия для наших условий

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}[r(t)] &= \frac{1}{a_0(k-1)} \int_{a_0}^{ka_0} \exp\left\{\frac{2A}{\gamma^2} \int_0^T \left[\frac{2a - (t-\tau)}{a^5}\right] r(t) \times \right. \\ &\quad \left. \times \exp\left(-\frac{t-\tau}{a}\right) - \frac{A^2}{\gamma^2 a^5}\right\} da dt, \end{aligned} \quad (13)$$

При слабых сигналах выражение (13) можно упростить, считая также, что наблюдение $r(t)$ ведется на интервале $(0, T)$, сравнимом с максимально возможной длительностью сигнала ($T \sim (3 \div 5) a_0 k$).

$$\Phi_1 = A \sum_{n=0}^m \nu_n L_n + \frac{\nu_1}{3} A^2, \quad (14)$$

где

$$L_n = \int_{\tau}^T (t-\tau)^n r(t) dt;$$

$$\nu_1 = \frac{3(k^3 + k^2 + k + 1)}{4a_0^5 k^4}; \nu_n = (-1)^n \frac{(n+2)(k^{n+2} + k^{n+1} + \dots + 1)}{n! a^{n+4} k^{n+3}};$$

$$\Phi_1 = (\Phi[r(t)] - 1) \frac{\gamma \sigma^2}{2}. \quad (15)$$

Оценки \hat{A} и $\hat{\tau}$ параметров сигнала $s(t)$ найдем из системы уравнений, полученной из выражения (14) при его дифференцировании по данным параметрам. Определим оценку \hat{A} , а затем максимизируем выражение (14) по $\hat{\tau}$. Условие существования имеет вид

$$\left[\sum_{n=0}^m \nu_n L_n - \frac{2}{3} \nu_1 A \right]_{A=\hat{A}} = 0,$$

а сама оценка

$$\hat{A} = \frac{3}{2\nu_1} \sum_{n=0}^m \nu_n L_n. \quad (16)$$

Так как решение является единственным, а вторая производная отрицательна, то абсолютный максимум функции правдоподобия существует при любом значении τ . Заметим, что при нелинейном оценивании практически существует всегда много локальных максимумов функции правдоподобия. Из выражений (14) и (16) получим

$$\left\{ \left[\sum_{n=0}^m \nu_n L_n \right] \left[\sum_{n=0}^{m-1} (n+1) L_n \nu_{n+1} \right] \right\}_{\tau=\hat{\tau}} = 0. \quad (17)$$

Полагая $m=1$, получим первое грубое приближение

$$\hat{\tau}' = \frac{\int_0^{\tau'} \text{tr}(t) dt - \int_0^{\hat{\tau}'} \text{tr}(t) dt}{\int_0^{\tau'} r(t) dt - \int_0^{\hat{\tau}'} r(t) dt} - \frac{2}{3} a_0 \frac{k(k^2 + k + 1)}{k^3 + k^2 + k + 1}. \quad (18)$$

Второе и последующие приближения находятся как корни многочленов третьей и более высокой степени относительно τ из уравнения (17).

Определим выражения для расчета нижней границы среднеквадратичной ошибки оценок \hat{A} и $\hat{\tau}$, используя неравенство Крамера-Рао [4]. Элементы I_{ij} информационной матрицы определяются следующим образом:

$$I_{ij} = \int_0^{\tau'} \frac{\partial s(t, \theta)}{\partial \theta_i} \frac{\partial g(t, \theta)}{\partial \theta_j} dt, \quad \theta = \{A, \tau\}. \quad (19)$$

Приближенные выражения для вычисления $\overline{(\tau - \hat{\tau})^2}$ и $\overline{(A - \hat{A})^2}$ получим для следующих случаев:

а) при известной ширине сигнала ($k=1$)

$$\overline{(\tau - \hat{\tau}')^2} \geq \frac{\gamma a_0^7}{5} \frac{\sigma^2}{A^2}, \quad (20)$$

$$\overline{(A - \hat{A})^2} \geq \frac{\gamma \sigma^2 a_0^5}{44}; \quad (21)$$

б) при наибольшей неопределенности длительности сигнала ($k \gg 1$)

$$\overline{(\tau - \hat{\tau})^2} \geq 3k \gamma a_0^7 \frac{\sigma^2}{A^2}, \quad (22)$$

$$\overline{(A - \hat{A})^2} \geq \frac{\gamma \sigma^2 a_0^5}{44}. \quad (23)$$

Из выражений (20÷23) следует, что в случае известной ширины сигнала единственное средство увеличить точность определения τ —это наблюдать сигналы с большими амплитудами. В то же время погрешность определения самой амплитуды значительна. В случае значительной неопределенности ширины сигнала погрешность определения параметра τ будет больше, нежели в первом случае, а ошибка оценивания амплитуды будет уменьшаться по мере увеличения данной неопределенности. Следует заметить, что наши выводы справедливы при слабых сигналах, поэтому при попытке уменьшить ошибки оценивания до более низкого уровня мы сталкиваемся с явлением порога. Физическая интерпретация данного явления такова: выбирается ошибочный интервал, на котором производятся локальные оценки данных параметров.

На рис. 1 показана структурная блок-схема полученной системы.

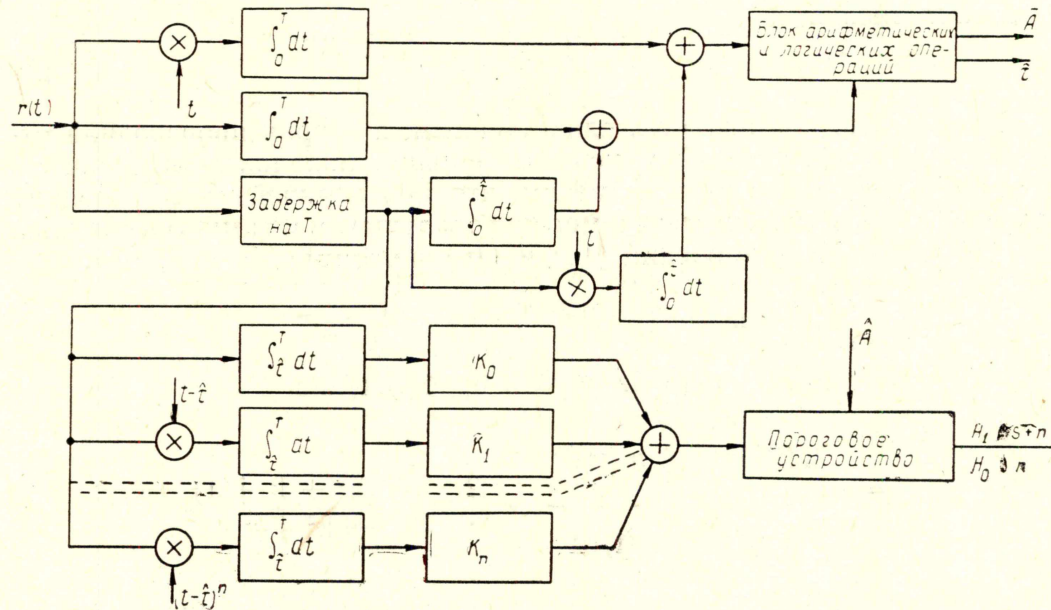


Рис. 1. Структурная схема алгоритма обработки радиометрической информации.

Далее определим качество функционирования разработанной системы. Из выражений (13÷17) статистика испытаний приводится к виду

$$\left(\sum_{n=0}^m \nu_n L_n \right)^2 \begin{matrix} > H_1 \\ < H_0 \end{matrix} \frac{2\nu_1}{3} \gamma \sigma^2 (\Phi - 1) \quad (24)$$

или

$$\left| \sum_{n=0}^m l_n \right|^2 \begin{matrix} > H_1 \\ < H_0 \end{matrix} C, \quad l_n = \nu_n L_n. \quad (25)$$

При гипотезе H_0

$$\begin{aligned} \bar{l}_n &= 0; \quad \bar{l}_0^2 = \sigma^2 \nu_0^2 = \mu_0^2; \\ \bar{l}_n^2 &= \left(\frac{n}{n+1} \right)^2 \frac{\Gamma^{2n}}{2n+1} \nu_n^2 \sigma^2 = \mu_n^2. \end{aligned}$$

Отсюда непосредственно находится выражение для вычисления условной вероятности ложной сигнализации о наличии дефекта

$$\alpha = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{m+1}{2}} \mu_0 \mu_1 \dots \mu_m} \int \dots \int_{(D)} \exp \left\{ - \sum_{n=0}^m \frac{l_n^2}{2\mu_n} \right\} dl_0 dl_1 \dots dl_m, \quad (26)$$

где D — евклидово пространство размерности $m+1$, исключая область Γ , лежащую двумя плоскостями

$$l_0 + l_1 + \dots + l_m - C = 0,$$

$$l_0 + l_1 + \dots + l_m + C = 0.$$

При гипотезе H_1

$$\bar{l}_n = \frac{AT^n}{n+1};$$

$$\sigma^2[l_0] = \sigma^2 = \mu_0^2; \quad \sigma^2[l_n] = \sigma^2 \nu^2 n \left(\frac{n}{n+1} \right)^2 \frac{T^{2n}}{2n+1} = \mu_n^2.$$

Условная вероятность пропуска дефекта

$$\beta = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{m+1}{2}} \mu_0 \mu_1 \dots \mu_m} \int \dots \int_{(\Gamma)} \exp \left\{ - \sum_{n=0}^m \frac{1}{2\mu_n^2} \left(l_n - \frac{AT^n}{n+1} \right)^2 \right\} \times \\ \times dl_0 dl_1 \dots dl_m. \quad (27)$$

На рис. 2 показано пространство решений при $m=1$. Получение более замкнутых выражений для расчета α и β представляет значительные трудности, поэтому целесообразно использовать в конкретных ситуациях численные методы расчета на ЭЦВМ, пользуясь выражениями (26) и (27).

На рис. 3 показаны рабочие характеристики данной модели, рассчитанные при $m=4$ и $k=1$. Величина M означает среднее по ширине сигнала отношение сигнал/шум. Пунктирной линией на данном рисунке изображены рабочие характеристики релейного дефектоскопа, рассчитанные для тех же условий контроля. Сравнение данных рабочих характеристик позволяет количественно оценить относительный выигрыш исследуемого алгоритма обработки радиометрической информации.

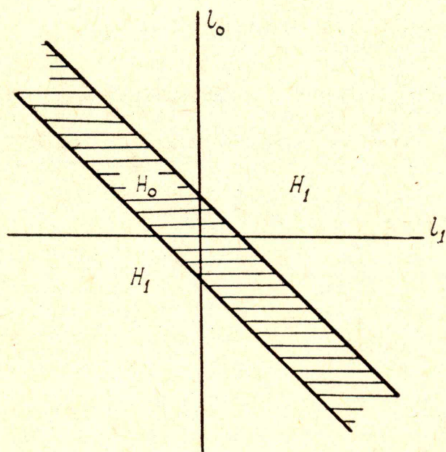


Рис. 2. Пространство решений при $m=1$.

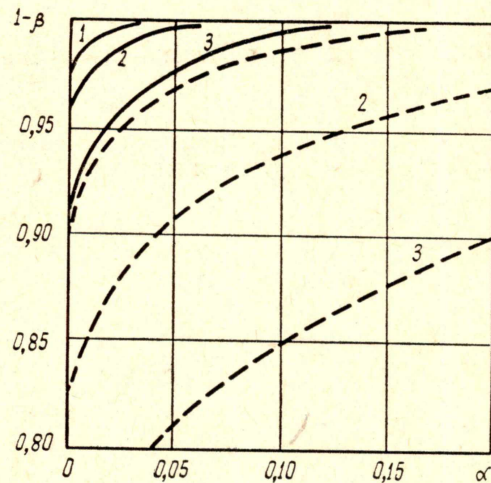


Рис. 3. Рабочие характеристики исследуемой модели дефектоскопа (сплошные линии) и релейного дефектоскопа: 1 — $M=4$, 2 — 3, 3 — 2.

Порог C задается критерием оптимальности системы (обычно критерием Неймана-Пирсона). Минимальная активность источника излучения определяется минимальной амплитудой сигнала, который необходимо оценивать и обнаруживать с заданной достоверностью.

Заключение

Получение данной оптимальной структуры системы является существенным моментом при построении реальных систем дефектоскопии, так как реальная, приближенная к оптимальной система должна отражать основные особенности оптимальной структуры. Рассмотренная модель в указанной области изменения параметров сигнала и шума позволила получить качественно верные результаты по обнаружению дефектов и измерению его параметров. Заметим, что данная модель наиболее справедлива для слабых сигналов. При появлении сильных сигналов достоверность наших суждений будет падать, кроме того, статистические свойства наблюдаемого процесса $g(t)$ будут существенно меняться. Анализ полученного алгоритма обработки процесса $g(t)$ показывает, что малые изменения параметров сигнала и помехи не приводят к значительным изменениям достоверности принимаемых решений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ван Трис. Г. Теория обнаружения, оценок и модуляции. Т. 1, М., «Советское радио», 1972.
2. И. И. Привалов. Интегральные уравнения. М., ОНТИ, 1935.
3. В. И. Смирнов. Курс высшей математики. М., Физматгиз, 1958.
4. Г. Крамер. Математические методы статистики. М., ИЛ, 1948.