

ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ПРЯМОЙ ЗАСЕЧКИ ГРАФИЧЕСКИМ СПОСОБОМ

В. И. АКУЛОВ

(Представлено научным семинаром кафедр маркшейдерского дела и геодезии)

Прямая засечка имеет широкое распространение в практике. Точность засечки обычно не анализируется, что объясняется сложностью известных в литературе способов оценки точности. Так, например, при аналитическом способе средние квадратические ошибки координат пункта C (рис. 1) вычисляются по формулам:

$$m_x = \pm \frac{m_\beta}{\sqrt{P_x}}; \quad (1)$$

$$m_y = \pm \frac{m_\beta}{\sqrt{P_y}}, \quad (2)$$

где P_x, P_y — веса абсциссы и ординаты пункта C ;
 m_β — средняя квадратическая ошибка измерения угла, вес которого равен единице.

Для определения весов P_x, P_y составляется система нормальных уравнений вида

$$[paa] \delta x + [pab] \delta y = 0;$$

$$[pab] \delta x + [pbb] \delta y = 0.$$

Координаты пункта C определяются непосредственно по измеренным углам β_1 и β_2 , поэтому свободные члены нормальных уравнений и поправки δx и δy равны нулю.

Коэффициенты a и b определяются по известным формулам

$$a_1 = -\frac{\rho \sin \alpha_{AC}}{S_{AC}}, \quad b_1 = \frac{\rho \cos \alpha_{AC}}{S_{AC}};$$

$$a_2 = -\frac{\rho \sin \alpha_{BC}}{S_{BC}}, \quad b_2 = \frac{\rho \cos \alpha_{BC}}{S_{BC}},$$

где α_{AC}, α_{BC} — дирекционные углы сторон AC и BC ;

S_{AC}, S_{BC} — длины сторон AC и BC ;

$\rho = 206265''$.

Веса P_x и P_y равны

$$P_x = P_y \frac{[Paa]}{[Pbb]}; \quad (3)$$

$$P_y = [Pbb \cdot 1]. \quad (4)$$

При графическом способе необходимо знать элементы среднеквадратического эллипса погрешностей, которые вычисляются по формулам

$$\operatorname{tg} 2\varphi_1 = \frac{-2[Pab]}{-([Paa] - [Pbb])}; \quad (5)$$

$$A^2 = m_{\beta}^2 \frac{[Paa] + [Pbb] + \omega}{2D}; \quad (6)$$

$$B^2 = m_{\beta}^2 \frac{[Paa] + [Pbb] - \omega}{2D}; \quad (7)$$

$$W = -\frac{2[Pab]}{\sin 2\varphi_1} = \frac{-([Paa] - [Pbb])}{\cos 2\varphi_1}; \quad (8)$$

$$D = [raa][rbb] \cdot 1, \quad (9)$$

где A , B — большая и малая полуоси среднеквадратического эллипса погрешностей;

φ_1 — дирекционный угол большой оси среднеквадратического эллипса погрешностей;
 D — определитель системы нормальных уравнений.

Средние квадратические ошибки координат пункта при графоаналитическом способе определяются по кривой среднеквадратических ошибок

$$P^2 = A^2 \cos^2 \Theta + B^2 \sin^2 \Theta, \quad (10)$$

где P — радиус-вектор;
 Θ — угол между большой осью среднеквадратического эллипса погрешностей и радиусом-вектором P .

В статье предлагается графический способ оценки точности прямой засечки.

Для обоснования графического способа установим средние квадратические ошибки координат

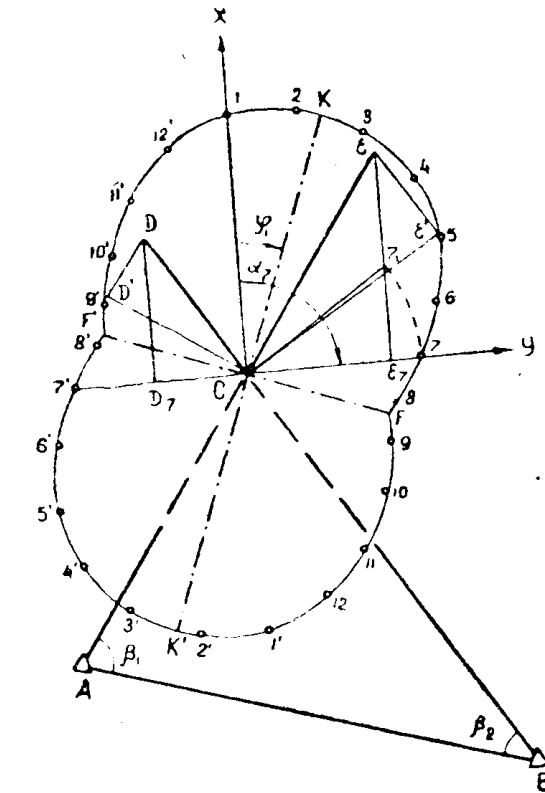


Рис. 1. Графическое определение погрешности координат при прямой засечке.

нат пункта C (рис. 1) из прямой засечки.

Координаты пункта C равны

$$X_C = X_A + \frac{b \sin \beta_2}{\sin (\beta_1 + \beta_2)} \cos (\alpha_{AB} - \beta_1); \quad (11)$$

$$Y_C = Y_A + \frac{b \sin \beta_2}{\sin (\beta_1 + \beta_2)} \sin (\alpha_{AB} - \beta_1), \quad (12)$$

где b , α_{AB} — длина и дирекционный угол твердой стороны AB .

Средние квадратические ошибки координат пункта C без учета ошибок твердых пунктов будут

$$m_x^2 = \frac{m_{\beta_1}^2 b^2 \sin^2 \beta_2 \cos^2 (\alpha_{AB} + \beta_2)}{\rho^2 \sin^4 (\beta_1 + \beta_2)} + \frac{m_{\beta_2}^2 b^2 \sin^2 \beta_1 \cos^2 (\alpha_{AB} - \beta_1)}{\rho^2 \sin^4 (\beta_1 + \beta_2)}, \quad (13)$$

$$m_y^2 = \frac{m_{\beta_1}^2 b^2 \sin^2 \beta_2 \sin^2 (\alpha_{AB} + \beta_2)}{\rho^2 \sin^4 (\beta_1 + \beta_2)} + \frac{m_{\beta_2}^2 b^2 \sin^2 \beta_1 \sin^2 (\alpha_{AB} - \beta_1)}{\rho^2 \sin^4 (\beta_1 + \beta_2)}, \quad (14)$$

где m_{β_1} , m_{β_2} — средние квадратические ошибки измерений углов β_1 и β_2 .

Средняя квадратическая линейная ошибка положения пункта C равна

$$M = \pm \sqrt{m_x^2 + m_y^2}, \quad (15)$$

или

$$M = \pm \frac{b \sqrt{m_{\beta_1}^2 \sin^2 \beta_2 + m_{\beta_2}^2 \sin^2 \beta_1}}{\rho \sin^2 (\beta_1 + \beta_2)}. \quad (15a)$$

При равноточном измерении углов ошибка M будет

$$M = \pm \frac{m_{\beta} b \sqrt{\sin^2 \beta_1 + \sin^2 \beta_2}}{\rho \sin^2 (\beta_1 + \beta_2)}. \quad (15b)$$

Обозначим

$$r_{BC} = \pm \frac{m_{\beta_1} b \sin \beta_2}{\rho \sin^2 (\beta_1 + \beta_2)}; \quad (16)$$

$$r_{AC} = \pm \frac{m_{\beta_2} b \sin \beta_1}{\rho \sin^2 (\beta_1 + \beta_2)}; \quad (17)$$

где r_{BC} , r_{AC} — векторы точности сторон BC и AC соответственно. Так как

$$AC = \frac{b \sin \beta_2}{\sin (\beta_1 + \beta_2)};$$

$$BC = \frac{b \sin \beta_1}{\sin (\beta_1 + \beta_2)},$$

то

$$r_{BC} = \pm \frac{m_{\beta_1} AC}{\rho \sin (\beta_1 + \beta_2)}; \quad (16a)$$

$$r_{AC} = \pm \frac{m_{\beta_2} BC}{\rho \sin (\beta_1 + \beta_2)}. \quad (17a)$$

Средние квадратические ошибки координат пункта C через векторы точности сторон равны

$$m_x^2 = r_{AC}^2 \cos^2 \alpha_{AC} + r_{BC}^2 \cos^2 \alpha_{BC}; \quad (18)$$

$$m_y^2 = r_{AC}^2 \sin^2 \alpha_{AC} + r_{BC}^2 \sin^2 \alpha_{BC}. \quad (19)$$

Отсюда

$$m_x^2 + m_y^2 = r_{AC}^2 + r_{BC}^2$$

или

$$M = \pm \sqrt{r_{AC}^2 + r_{BC}^2}. \quad (20)$$

Формулы (18, 19) запишем одной формулой, а именно

$$m_{\alpha}^2 = r_{AC}^2 \cos^2 (\alpha - \alpha_{AC}) + r_{BC}^2 \cos^2 (\alpha - \alpha_{BC}), \quad (21)$$

где m_α — средняя квадратическая ошибка положения пункта по направлению с дирекционным углом α .

Уравнение (21) есть уравнение кривой среднеквадратических ошибок пункта из прямой засечки, соответствующее уравнению (10).

Преобразуем уравнение (21).

Функция (21) достигает максимума и минимума при α равном φ_1 и φ_2 , определяемых по формулам

$$\operatorname{tg} 2\varphi_1 = \frac{r_{AC}^2 \sin 2\alpha_{AC} + r_{BC}^2 \sin 2\alpha_{BC}}{r_{AC}^2 \cos 2\alpha_{AC} + r_{BC}^2 \cos 2\alpha_{BC}}; \quad (22)$$

$$\varphi_2 = \varphi_1 \pm 90^\circ. \quad (23)$$

Обозначим

$$\alpha = \varphi_1 + \Theta, \quad (24)$$

где Θ — угол между заданным направлением и направлением, по которому ошибка m_α максимальна.

Тогда уравнение (21) примет вид

$$m_\alpha^2 = A^2 \cos^2 \Theta + B^2 \sin^2 \Theta; \quad (25)$$

$$A^2 = r_{AC}^2 \cos^2 (\varphi_1 - \alpha_{AC}) + r_{BC}^2 \cos^2 (\varphi_1 - \alpha_{BC}); \quad (26)$$

$$B^2 = r_{AC}^2 \sin^2 (\varphi_1 - \alpha_{BC}) + r_{BC}^2 \sin^2 (\varphi_1 - \alpha_{BC}). \quad (27)$$

Уравнение (25), как известно, выражает падэру среднеквадратического эллипса погрешностей с полуосями A , B и дирекционным углом большой оси равным φ_1 .

Формулы (26) и (27) можно записать так

$$A^2 = \frac{1}{2} (M^2 + W); \quad (26a)$$

$$B^2 = \frac{1}{2} (M^2 - W); \quad (27a)$$

$$W = \frac{r_{AC}^2 \sin 2\alpha_{AC} + r_{BC}^2 \sin 2\alpha_{BC}}{\sin 2\varphi_1}. \quad (28)$$

Дирекционный угол большой оси среднеквадратического эллипса погрешностей и величину w можно определить и графическим путем. Для этого строится квадратический полигон со стороны r_{AC}^2 и r_{BC}^2 и дирекционными углами $2\alpha_{AC}$ и $2\alpha_{BC}$ соответственно. Дирекционный угол замыкающей квадратического полигона равен $2\varphi_1$, а длина замыкающей равна w .

Формулу (21) запишем так:

$$m_\alpha^2 = r_{AC_\alpha}^2 + r_{BC_\alpha}^2; \quad (21б)$$

$$r_{AC_\alpha} = r_{AC} \cos (\alpha - \alpha_{AC}); \quad (29)$$

$$r_{BC_\alpha} = r_{BC} \cos (\alpha - \alpha_{BC}), \quad (30)$$

где r_{AC_α} , r_{BC_α} — проекции векторов точности сторон AC и BC на заданное направление с дирекционным углом α .

Уравнение (25) по аналогии с уравнением (21б) можно представить в виде

$$m_a^2 = A_a^2 + B_a^2; \quad (25a)$$

$$A_a = A \cos(\alpha - \varphi_1); \quad (31)$$

$$B_a = B \cos(\alpha - \varphi_2), \quad (32)$$

где A_a , B_a — проекции полуосей среднеквадратического эллипса погрешностей на заданное направление с дирекционным углом α .

Необходимо отметить, что уравнения (10), (21б) и (25а) выражают одну и ту же кривую, а именно, кривую среднеквадратических ошибок пункта, определенного прямой засечкой.

Пользуясь формулой (21б), оценку точности прямой засечки можно легко и быстро произвести графическим способом.

Графический способ оценки точности прямой засечки выполняется в следующей последовательности.

По заданным углам β_1 и β_2 на схеме определяют положение пункта C (рис. 1) относительно твердых пунктов A и B . Со схемы графическим путем находят длины сторон AC и BC . По сторонам AC и BC вычисляют перпендикулярные смещения пункта C относительно сторон AC и BC по формулам

$$U_{AC} = \pm \frac{m_{\beta_1} AC}{\rho}; \quad (33)$$

$$U_{BC} = \pm \frac{m_{\beta_2} BC}{\rho}. \quad (34)$$

Так, например, для пункта C (рис. 1) имеем

$$U_{AC} = \pm \frac{5 \cdot 56 \cdot 40000}{206265} = \pm 54 \text{ мм};$$

$$U_{BC} = \pm \frac{5 \cdot 81 \cdot 40000}{206265} = \pm 79 \text{ мм},$$

где $m_{\beta_1} = m_{\beta_2} = \pm 5''$,

40000 — знаменатель масштаба, в котором составлена схема.

На схеме в удобном масштабе откладывают перпендикулярные смещения пункта C , например, на рис. 1 перпендикулярные смещения $U_{AC} = CD'$ и $U_{BC} = E'C$ отложены в масштабе 1:2.

Из точек D' и E' проводят прямые $D'D$ и $E'E$ параллельно сторонам AC и BC до пересечения с продолжением сторон BC и AC соответственно.

Отрезки CD и CE , как это следует из формул (16а, 17а, 33 и 34) и построения, есть векторы точности сторон BC и AC в масштабе, в каком отложены перпендикулярные смещения U_{AC} и U_{BC} .

Для определения проекции векторов точности сторон на заданное направление с дирекционным углом α , например, на заданное направление D_7E_7 (рис. 1) с дирекционным углом α_7 , проектируем векторы точности сторон на заданное направление, получим точки D_7 и E_7 . Отрезок CD_7 откладываем на линии E_7E ($E_7D_7 = CD_7$), получим точку 7_1 . Гипотенуза прямоугольного треугольника CE_7D_7 и есть средняя погрешность положения пункта C по направлению с дирекционным углом α_7 . Точку 7_1 радиусом $C7_1$ сносим на линию D_7E_7 , получим две диаметрально противоположные точки 7 и $7'$. Отрезки $C7$ и $C7'$

соответствуют, как это следует из построения, средней квадратической ошибке положения пункта C по заданному направлению с дирекционным углом α_7 в масштабе, в каком отложены перпендикулярные смещения пункта C .

Точки 7 и $7'$ лежат на кривой среднеквадратических ошибок пункта C . Построив для ряда заданных направлений, например через 15° (рис. 1), считая от оси абсцисс, точки $1, 2$, и т. д. аналогично точкам 7 и $7'$ и соединив их плавной кривой, получим кривую среднеквадратических ошибок для пункта C . Например, на рис. 1 кривая среднеквадратических ошибок построена в масштабе $1:2$.

По кривой среднеквадратических ошибок графически можно определить элементы среднеквадратического эллипса погрешностей для пункта C , т. е. большую и малую полуоси и дирекционный угол большой оси. Например, для пункта C (рис. 1) элементы среднеквадратического эллипса погрешностей равны

$$\begin{aligned} A &= CK = \pm 90 \text{ мм}; \\ B &= CF = \pm 50 \text{ мм}; \\ \varphi_1 &= 20^\circ \end{aligned}$$

Аналитический расчет по формулам (5, 6 и 7) или (22, 26а и 27а) дает

$$A = \pm 91 \text{ мм}; \quad B = \pm 51 \text{ мм} \quad \text{и} \quad \varphi_1 = 20^\circ 07'.$$

Средние квадратические ошибки координат пункта C , соответствующие среднеквадратическим ошибкам положения пункта C по координатным осям, определяются аналогично, как для направления с дирекционным углом α_7 . Так, например, для пункта C (рис. 1) ошибки координат будут

$$\begin{aligned} m_x &= C1 = \pm 87 \text{ мм}; \\ m_y &= C7 = \pm 58 \text{ мм}. \end{aligned}$$

Аналитический расчет по формулам (1, 2) дает

$$\begin{aligned} m_x &= \pm 87 \text{ мм}; \\ m_y &= \pm 57 \text{ мм}. \end{aligned}$$

Из сравнения результатов оценки точности прямой засечки (рис. 1), выполненной графическим и аналитическим способами, видно, что предлагаемый графический способ дает хорошую сходимость с аналитическими расчетами.

Таким образом, пользуясь вектором точности сторон, можно легко и быстро для прямой засечки графическим путем найти как погрешность пункта в любом заданном направлении, так и построить кривую среднеквадратических ошибок не зная элементов среднеквадратического эллипса погрешностей.

Если пункт триангуляции IV класса определяется многократной прямой засечкой с измерением углов (рис. 2), то координаты пункта с достаточной для практической цели точностью можно вычислять по формулам

$$X_0 = \frac{[P_x X]}{[P_x]}; \quad (35)$$

$$Y_0 = \frac{[P_y Y]}{[P_y]}, \quad (36)$$

где X, Y — координаты пункта из однократной прямой засечки;

P_x, P_y — веса абсциссы и ординаты пункта из однократной прямой засечки.
 Веса P_x и P_y равны

$$P_x = \frac{\kappa}{m_x^2}; \quad (37)$$

$$P_y = \frac{\kappa}{m_y^2}, \quad (38)$$

где m_x, m_y — средние квадратические ошибки координат пункта из однократной засечки;
 κ — постоянное число.

Ошибки m_x и m_y для каждой независимой однократной прямой засечки определяются рассмотренным выше графическим способом.

При равноточном измерении углов веса P_x и P_y удобнее определять по формулам

$$P_x = \frac{\kappa}{R_x^2}; \quad (39)$$

$$P_y = \frac{\kappa}{R_y^2}, \quad (40)$$

где R_x, R_y — условные ошибки абсциссы и ординаты пункта из однократной прямой засечки.

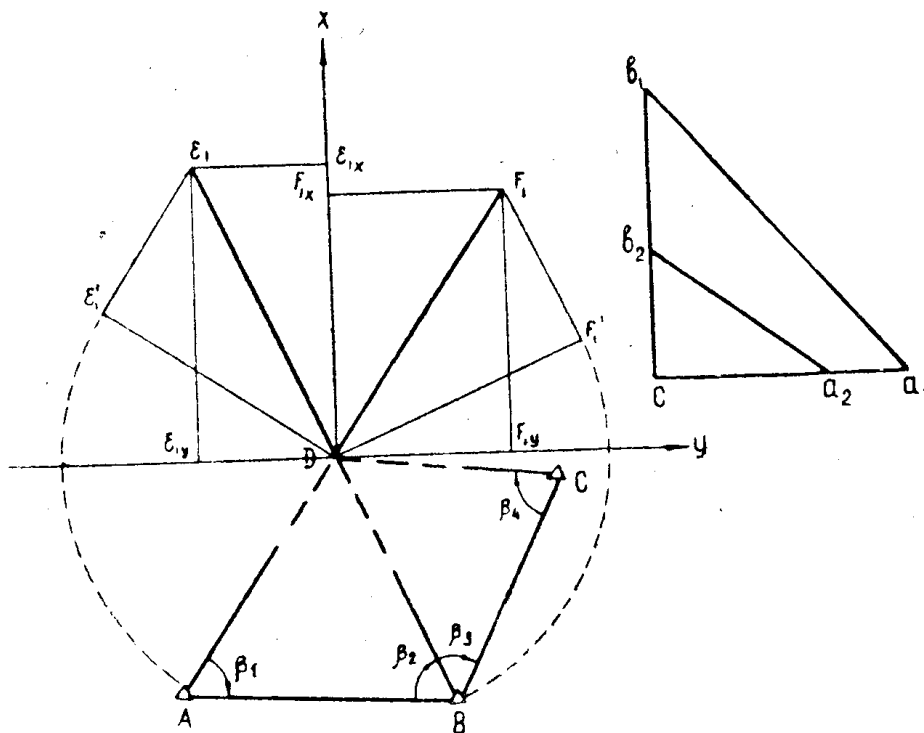


Рис. 2. Графическое определение условных ошибок координат при многократной прямой засечке.

Условные ошибки R_x и R_y , например для первой засечки ADB (рис. 2), равны

$$R_{x_1} = \sqrt{R_{AD_x}^2 + R_{BD_x}^2}; \quad (41)$$

$$R_{y_1} = \sqrt{R_{AD_y}^2 + R_{BD_y}^2}, \quad (42)$$

где R_{AD_x} , R_{AD_y} — проекции условного вектора точности стороны AD на оси абсцисс и ординат;
 R_{BD_x} , R_{BD_y} — проекции условного вектора точности стороны BD на оси абсцисс и ординат.

Условные векторы точности сторон, например для первой засечки (рис. 2), равны

$$R_{AD_1} = \frac{BD}{\sin(\beta_1 + \beta_2)}; \quad (43)$$

$$R_{BD_1} = \frac{AD}{\sin(\beta_1 + \beta_2)}. \quad (44)$$

Условные векторы точности сторон и условные ошибки координат пункта из однократной прямой засечки определяются графическим путем.

Так, например, для определения условных векторов точности для первой засечки (рис. 2) проводим через пункт D к сторонам DA и DB перпендикулярные прямые DE'_1 и DF'_1 . Циркулем сносим точки A и B на прямые DE'_1 и DF'_1 . Из точек E'_1 и F'_1 проводим прямые E'_1E_1 и F'_1F_1 параллельно сторонам AD и BD соответственно до пересечения с продолжением сторон BD и AD . Отрезки DE_1 и DF_1 в масштабе схемы равны условным векторам точности сторон BD и AD , т. е.

$$R_{AD_1} = DF_1 \quad \text{и} \quad R_{BD_1} = DE_1.$$

Условные векторы точности сторон AD и BD , т. е. отрезки DF_1 и DE_1 , проектируем на координатные оси, получим проекции векторов точности сторон на координатные оси, например,

$$R_{AD_x} = DF_{1x}, \quad R_{AD_y} = DF_{1y} \quad \text{и} \quad R_{BD_x} = DE_{1x}, \quad R_{BD_y} = DE_{1y}.$$

Строим два прямоугольных треугольника a_1b_1c и a_2b_2c (рис. 2), первый с катетами $ca_1 = R_{AD_x}$ и $cb_1 = R_{BD_x}$ и второй — с катетами $ca_2 = R_{AD_y}$ и $cb_2 = R_{BD_y}$. Гипотенузы указанных треугольников и будут соответствовать условным ошибкам координат пункта, а именно

$$R_{x_1} = a_1b_1;$$

$$R_{y_1} = a_2b_2.$$

Условные ошибки координат R_x и R_y выражаются в сантиметрах или в миллиметрах. Так, например, для первой засечки (рис. 2)

$$R_{x_1} = a_1b_1 = 67 \text{ мм}, \quad R_{y_1} = a_2b_2 = 38 \text{ мм}.$$

Условные ошибки координат пункта D из второй независимой прямой засечки BDC (рис. 2), найденные аналогичным путем, как и для первой, равны $R_{x_2} = 40 \text{ мм}$ и $R_{y_2} = 55 \text{ мм}$.

Веса координат пункта D (рис. 2) из отдельных независимых засечек, вычисленные по формулам (39, 40), равны

а) из первой засечки:

$$P_{x_1} = \frac{\kappa}{R_x^2} = \frac{1000}{67^2} = 0,22;$$

$$P_{y_1} = \frac{\kappa}{R_y^2} = \frac{1000}{38^2} = 0,69;$$

б) из второй засечки:

$$P_{x_2} = \frac{\kappa}{R_{x_2}^2} = \frac{1000}{40^2} = 0,62;$$

$$R_{y_2} = \frac{\kappa}{R_{y_2}^2} = \frac{1000}{55^2} = 0,33.$$

Координаты пункта D из первой и второй независимых засечек (рис. 2) равны

$$X_{D_1} = 1859,476 \text{ м}, \quad Y_{D_1} = 928,846 \text{ м};$$

$$X_{D_2} = 1859,644 \text{ м}, \quad Y_{D_2} = 928,770 \text{ м}^1).$$

Средневзвешенные координаты пункта D , вычисленные по формулам (35) и (36), будут

$$X_0 = 1859,600 \text{ м};$$

$$Y_0 = 928,821 \text{ м}.$$

Из строгого уравнивания координаты пункта D равны

$$X = 1859,590 \text{ м};$$

$$Y = 928,833 \text{ м}.$$

Координаты пункта D , вычисленные как арифметическое среднее из первой и второй засечек, как это рекомендуется в „Справочнике по маркшейдерскому делу“, будут

$$X' = 1859,560 \text{ м};$$

$$Y' = 928,808 \text{ м}.$$

Из сравнения координат пункта D видно, что средневзвешенные координаты, вычисленные по формулам (35, 36), близки к координатам из строгого уравнивания.

Выводы

1. Оценку точности прямых засечек необходимо производить графическим способом.

2. При многократной прямой засечке пункта триангуляции IV класса за окончательные координаты можно принимать средневзвешенные из отдельных независимых прямых засечек.

Весы координат пункта из отдельных засечек определяются графическим путем.

3. Пункт прямой засечкой необходимо определять с тех твердых пунктов, с которых линейная ошибка пункта, вычисленная по формуле (20), имеет минимальную величину.

¹⁾ Справочник по маркшейдерскому делу, Углетехиздат, стр. 294, 1955.