ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 125 1964

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ТЕМПЕРАТУРЫ НА ПОВЕРХНОСТЯХ НЕОГРАНИЧЕННОЙ ПЛАСТИНЫ ПРИ НАГРЕВЕ РАДИАЦИЕЙ

Ю. В. ВИДИН, Г. П. БОЙКОВ

(Представлена проф. докт. техн. наук Г. И. Фуксом)

Прогрев плоской стенки под действием радиации для целого ряда практических условий описывается системой уравнений:

$$\frac{\partial T(x,\tau)}{\partial\tau} = a\frac{\partial^2 T(x,\tau)}{\partial x^2}; \qquad (1)$$

$$\lambda\frac{\partial T(+R,\tau)}{\partial x} = \varepsilon_{n1} C_0\left[\left(\frac{T_{C1}}{100}\right)^4 - \left(\frac{T(+R,\tau)}{100}\right)^4\right], \qquad (2)$$

$$-\lambda\frac{\partial T(-R,\tau)}{\partial x} = \varepsilon_{n2} C_0\left[\left(\frac{T_{C2}}{100}\right)^4 - \left(\frac{T(-R,\tau)}{100}\right)^4\right]; \qquad (3)$$

$$T(x,0) = T_0 = \mathrm{const}. \qquad (4)$$

Представить решение этой системы в явном виде пока не имеется возможности из-за сложности граничных условий (2) и (3). Тем не менее математически задача решается, если каким-либо образом будут известны законы изменения температуры ($T(+R,\tau)$ и $T(-R,\tau)$) на поверхностях пластины.

Действительно, решая систему уравнений:

$$\frac{\partial T(x,\tau)}{\partial\tau} = a\frac{\partial^2 T(x,\tau)}{\partial x^2}; \qquad (1')$$

$$T(+R,\tau) = T_1(\tau); \qquad (2')$$

$$T(-R,\tau) = T_2(\tau); \qquad (3')$$

$$T(x,0) = T_0 = \mathrm{const}, \qquad (4')$$

можно получить распределение температуры по сечению [1], [2]:

$$T(x,\tau) = T_1(\tau) - \frac{R-x}{2R}\left[T_1(\tau) - T_2(\tau)\right] -$$

$$-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\exp\left[-\left(\frac{\pi n}{2}\right)^2\frac{a\tau}{R^2}\right]\sin\left(\pi n\frac{R-x}{2R}\right)\int_0^{\tau}\exp\left[\left(\frac{\pi n}{2}\right)^2\frac{a\vartheta}{R^2}\right]\times$$

$$\times \left\{ \frac{\partial [T_1(\vartheta)]}{\partial \vartheta} + (-1)^{n+1} \frac{\partial [T_2(\vartheta)]}{\partial \vartheta} \right\} d\vartheta. \tag{5}$$

Следовательно, вопрос отыскания интеграла системы (1) ÷ (4) сводится к нахождению температуры поверхностей стенки. Последние могут быть определены, если ограничиться примерами, для которых достаточно использовать лишь один член бесконечного ряда. При таком допущении зависимость (5) принимает вид

$$T(x,\tau) = T_1(\tau) - \frac{R-x}{2R} [T_1(\tau) - T_2(\tau)] -$$

$$-\frac{2}{\pi} \exp\left[-\frac{\pi^2}{4} \frac{a\tau}{R^2}\right] \sin\left(\pi \frac{R-x}{2R}\right) \int_0^\tau \exp\left[\frac{\pi^2}{4} \frac{a\vartheta}{R^2}\right] \times$$

$$\times \left\{ \frac{\partial [T_1(\vartheta)]}{\partial \vartheta} + \frac{\partial [T_2(\vartheta)]}{\partial \vartheta} \right\} d\vartheta. \tag{5'}$$

Производя дифференцирование этого выражения по координате x и подставляя результат в граничные условия (2) и (3), имеем:

$$\frac{1}{2R} [T_1(\tau) - T_2(\tau)] + \frac{1}{R} \exp\left[-\frac{\pi^2}{4} \frac{a\tau}{R^2}\right] \int_0^\tau \exp\left[\frac{\pi^2}{4} \frac{a\vartheta}{R^2}\right] \times$$

$$\times \left\{ \frac{\partial [T_1(\vartheta)]}{\partial \vartheta} + \frac{\partial [T_2(\vartheta)]}{\partial \vartheta} \right\} d\vartheta = \frac{\varepsilon_{n1} \cdot C_0}{\lambda} \left[\left(\frac{T_{C1}}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_1(\tau)}{100}\right)^4 \right]; \tag{6}$$

$$-\frac{1}{2R} [T_1(\tau) - T_2(\tau)] + \frac{1}{R} \exp\left[-\frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{a\tau}{R^2}\right] \int_0^\tau \exp\left[\frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{a\vartheta}{R^2}\right] \times$$

$$\times \left\{ \frac{\partial [T_1(\vartheta)]}{\partial \vartheta} + \frac{\partial [T_2(\vartheta)]}{\partial \vartheta} \right\} d\vartheta = \frac{\varepsilon_{n2} \cdot C_0}{\lambda} \left[\left(\frac{T_{C2}}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2(\tau)}{100}\right)^4 \right]. \tag{7}$$

Согласно (6) и (7)

$$\int_0^\tau \exp\left[\frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{a\vartheta}{R^2}\right] \left\{ \frac{\partial [T_1(\vartheta)]}{\partial \vartheta} + \frac{\partial [T_2(\vartheta)]}{\partial \vartheta} \right\} d\vartheta =$$

$$= \frac{R}{2\lambda} \cdot \exp\left[\frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{a\tau}{R^2}\right] \times \left\{ \varepsilon_{n1} \cdot C_0 \left[\left(\frac{T_{c1}}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_1(\tau)}{100}\right)^4 \right] + \right.$$

$$\left. + \varepsilon_{n2} \cdot C_0 \left[\left(\frac{T_{c2}}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2(\tau)}{100}\right)^4 \right] \right\}. \tag{8}$$

Подстановка этого соотношения в (5′) дает

$$T(x,\tau) = T_1(\tau) - \frac{R-x}{2R} [T_1(\tau) - T_2(\tau)] -$$

$$-\frac{1}{\pi} \frac{R}{\lambda} \sin\left(\pi \frac{R-x}{2R}\right) \times \left\{ \varepsilon_{n1} \cdot C_0 \left[\left(\frac{T_{c1}}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_1(\tau)^4}{100}\right) \right] + \right.$$

$$\left. + \varepsilon_{n2} \cdot C_0 \left[\left(\frac{T_{c2}}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2(\tau)}{100}\right)^4 \right] \right. \tag{9}$$

или

$$T(x,\tau) = T_1(\tau) - \frac{R-x}{2R}\left[T_1(\tau) - T_2(\tau)\right] -$$

$$-\frac{1}{\pi}\sin\left(\pi\frac{R-x}{2R}\right)\left\{\mathrm{Ki}_1\cdot(T_{c1}-T_0)\frac{T_{c1}^4 - T_1^4(\tau)}{T_{c1}^4 - T_0^4} + \right.$$

$$\left. + \mathrm{Ki}_2(T_{c2}-T_0)\frac{T_{c2}^4 - T_2^4(\tau)}{T_{c2}^4 - T_0^4}\right\}, \qquad (9')$$

где

$$\mathrm{Ki}_1 = \frac{\varepsilon_{n1}\cdot C_0\left[\left(\frac{T_{c1}}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_0}{100}\right)^4\right]\cdot R}{\lambda(T_{c1}-T_0)},$$

$$\mathrm{Ki}_2 = \frac{\varepsilon_{n2}\cdot C_0\left[\left(\frac{T_{c2}}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_0}{100}\right)^4\right]\cdot R}{\lambda(T_{c2}-T_0)}$$

есть критерии Кирпичева [3], соответственно для левой и правой поверхностей пластины.

Из интегральных уравнений (6) и (7) можно вывести функциональные связи:

$$T_1(\tau) - T_2(\tau) = \mathrm{Ki}_1(T_{c1}-T_0)\frac{T_{c1}^4 - T_1^4(\tau)}{T_{c1}^4 - T_0^4} -$$

$$-\mathrm{Ki}_2(T_{c2}-T_0)\frac{T_{c2}^4 - T_2^4(\tau)}{T_{c2}^4 - T_0^4}; \qquad (10)$$

$$-\ln\frac{\mathrm{Ki}_1(T_{c1}-T_0)\frac{T_{c1}^4 - T_1^4(\tau)}{T_{c1}^4 - T_0^4} + \mathrm{Ki}_2(T_{c2}-T_0)\frac{T_{c2}^4 - T_2^4(\tau)}{T_{c2}^4 - T_0^4}}{\mathrm{Ki}_1(T_{c1}-T_0) + \mathrm{Ki}_2(T_{c2}-T_0)} -$$

$$-4\int_{T_0}^{T_1}\frac{1 + 4\,\mathrm{Ki}_1(T_{c1}-T_0)\frac{[T_1^*(\tau)]^3}{T_{c1}^4 - T_0^4}}{f(T_1^*) - T_1^* + 2\mathrm{Ki}_1(T_{c1}-T_0)\frac{T_{c1}^4 - [T_1^*(\tau)]^4}{T_{c1}^4 - T_0^4}}\,dT_1^* =$$

$$= -\frac{\pi^2}{4}\mathrm{Fo}_0. \qquad (11)$$

Эти уравнения позволяют найти температуры поверхностей

$$T(+R,\tau) = T_1(\tau) \text{ и } T(-R,\tau) = T_2(\tau) = f(T_1).$$

Следует заметить, что графическое определение температуры поверхности из выражения (11) не создает сколько-нибудь больших затруднений, так как критерий Фурье, входящий в правую часть уравнения, не связан никакой функциональной зависимостью.

В том случае, когда температуры на поверхностях пластины изменяются по одинаковым законам $T_1(\tau) = T_2(\tau) = T(\tau)$ (т. е. когда имеют место симметричные условия нагрева), соотношения (9′) и (11) приобретают форму

$$T(x,\tau) = T(\tau) - \frac{2}{\pi}\sin\left(\pi\frac{R-x}{2R}\right)\mathrm{Ki}(T_c - T_0)\times$$

$$\times\frac{T_c^4 - T^4(\tau)}{T_c^4 - T_0^4}; \qquad (9'')$$

$$\ln\left(\frac{T_c^4 - T^4(\tau)}{T_c^4 - T_0^4}\right) - \frac{T_c^4 - T_0^4}{\mathrm{Ki}\,(T_c - T_0)\cdot T_c^3} \times$$

$$\times\left[\ln\frac{[T_c + T(\tau)]\cdot[T_c - T_0]}{[T_c - T(\tau)]\cdot[T_c + T_0]} + 2\left(\operatorname{arctg}\frac{T(\tau)}{T_c} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \operatorname{arctg}\frac{T_0}{T_c}\right)\right] = -\frac{\pi^2}{4} Fo_0. \qquad (11')$$

На рис. 1 приведены кривые изменения относительной температуры поверхностей, а также разность температур по толщине пластины (пунктирные линии), построенные согласно (9″) и (11′). Здесь же для сравнения нанесены кривые (сплошные линии), полученные расчетом для таких же условий методом численного интегрирования [4].

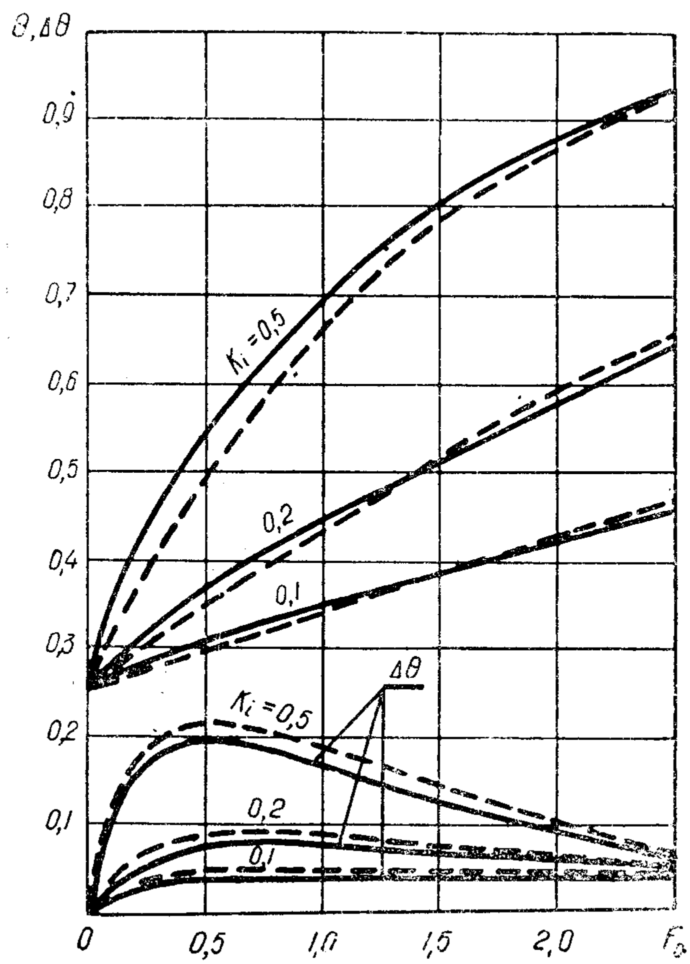

Рис. 1. Изменение относительной температуры поверхности и разности температур по сечению при симметричном нагреве радиацией.

На рис. 2 показана картина температурного поля в неограниченной пластине при $\mathrm{Ki}_1 = 1{,}0$; $\mathrm{Ki}_2 = 0{,}1$; $T_{c1} = 1700°K$; $T_{c2} = 1190°K$; $T_0 = 300°K$, полученное согласно (9′), (10) и (11) (пунктирные. линии). Сплошными линиями изображается распределение температуры, найденное методом численного интегрирования при тех же исходных данных.

Таким образом, благодаря структурной форме закономерностей (11) и (11′), появляется возможность проводить скоростные расчеты температуры поверхностей при симметричном и несимметричном нагреве. Это в свою очередь позволяет находить все поле температуры.

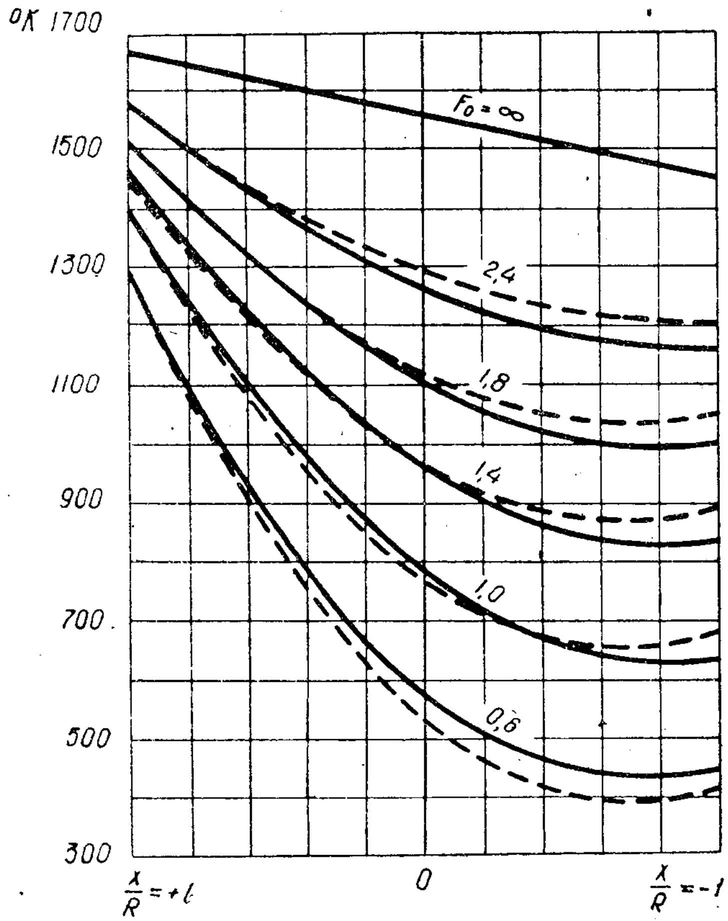

Рис. 2. Картина температурного поля в плоской стенке при несимметричном нагреве радиацией.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кудрявцев Е. В., Чакалев К. Н., Шумаков Н. В. Нестационарный теплообмен. Изд-во Академии наук СССР, 1961.
2. Малкин В. М., Шкляр Ф. Р. Регенеративный теплообмен. Сб. научных трудов № 8, Металлургиздат, 1962.
3. Лыков А. В. Теория теплопроводности. М., ГИТТЛ, 1952.
4. Ваничев А. П. Труды НИИ—1, № 25, 1947.