ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 125 1964

О ТЕМПЕРАТУРНОМ ПОЛЕ В ПЛОСКОМ ТОЛСТОСТЕННОМ ЭКРАНЕ

Ю. В. ВИДИН, Г. П. БОЙКОВ

(Представлена проф. докт. техн. наук Г. И. Фуксом)

Очень часто приходится встречаться с необходимостью определения установившегося поля температуры в плоской стенке. Большой интерес представляют примеры, когда теплообмен на границах тела происходит по закону Стефана-Больцмана.

В литературе подобные вопросы рекомендуется решать подбором. Известно, что процесс подбора в ряде случаев может оказаться весьма трудоемким и технически неудобным. Это и имеет место как раз тогда, когда граничные условия выражены разностью четвертых степеней абсолютных температур.

Ниже предлагается способ, позволяющий применить метод скоростной итерации, для определения температурного поля в плоском толстостенном экране.

Для неограниченной пластины задача подобного рода математически может быть сформулирована в следующем виде·

$$\frac{d}{dx}\left[\lambda(T)\frac{dT(x)}{dx}\right]=0; \tag{1}$$

$$\lambda(T)|_{T(+R)}\cdot\frac{dT(+R)}{dx}=\varepsilon_{n_1}\cdot C_0\left[\left(\frac{T_{c_1}}{100}\right)^4-\left(\frac{T(+R)}{100}\right)^4\right]; \tag{2}$$

$$-\lambda(T)|_{T(-R)}\frac{dT(-R)}{dx}=\varepsilon_{n_2}\cdot C_0\left[\left(\frac{T_{c_2}}{100}\right)^4-\left(\frac{T(-R)}{100}\right)^4\right], \tag{3}$$

где T_{c_1} и T_{c_2} — температуры греющих сред для левой и правой сторон, °К;

ε_{n_1}, ε_{n_2} — значения приведенной степени черноты, соответственно для левой и правой стороны;

C_0 — коэффициент излучения абсолютно черного тела,

$$C_0=5{,}7\,\frac{вт}{м^2\cdot{}^\circ К^4};$$

$\lambda(T)$ — коэффициент теплопроводности тела, зависящий в общем случае от температуры, $\frac{вт}{м\cdot{}^\circ К}$;

$T(+R)$, $T(-R)$ — температуры, соответственно, левой и правой поверхностей пластины, °К;

$2R$ — полная толщина пластины, *м*.

Решение системы уравнений (1), (2) и (3) можно представить в виде

$$\int \lambda(T)\,dT = \frac{\int \lambda(T)\cdot dT|_{T(-R)} \int \lambda(T)\cdot dT|_{T(-R)}}{2}\,\frac{x}{R} + $$

$$+ \frac{\int \lambda(T)\cdot dT|_{T(+R)} + \int \lambda(T)\cdot dT|_{T(-R)}}{2}. \quad (4)$$

Для получения этой закономерности в явном виде необходимо знать зависимость коэффициента теплопроводности от температуры и значения температур поверхностей тела $T(+R)$ и $T(-R)$. Определение этих температур производится на основании заданных краевых условий (2) и (3). Для нахождения $T(+R)$ и $T(-R)$ получаются два уравнения:

$$\varepsilon_{n_1}\cdot C_0\cdot\left[\left(\frac{T_{c_1}}{100}\right)^4 - \left(\frac{T(+R)}{100}\right)^4\right] = -\varepsilon_{n_2}\cdot C_0\left[\left(\frac{T_{c_2}}{100}\right)^4 - \left(\frac{T(-R)}{100}\right)^4\right]; \quad (5)$$

$$\frac{\int \lambda(T)\cdot dT|_{T(+R)} - \int \lambda(T)\cdot dT|_{T(-R)}}{2R} = \varepsilon_{n_1}\cdot C_0\left[\left(\frac{T_{c_1}}{100}\right)^4 - \left(\frac{T(+R)}{100}\right)^4\right]. \quad (6)$$

Зная $\lambda = \lambda(T)$, из выражения (6) находим $T(-R) = f[T(+R)]$. Подстановка этого соотношения в (5) дает

$$\frac{\varepsilon_{n_1}}{\varepsilon_{n_2}}\left(\frac{T_{c_1}}{100}\right)^4 + \left(\frac{T_{c_2}}{100}\right)^4 = \frac{\varepsilon_{n_1}}{\varepsilon_{n_2}}\left(\frac{T(+R)}{100}\right)^4 + \left(\frac{f[T(+R)]}{100}\right)^4. \quad (7)$$

Как правило, степень уравнения (7) выше, чем четыре, и поэтому решение не может быть представлено при помощи радикалов через его коэффициенты. Анализ этого выражения на число действительных положительных корней может быть проведен на основании существующих методов высшей алгебры (метод Штурма, правило Декарта и др.). Из физических представлений о процессе естественно ожидать существование только одного действительного положительного корня для уравнения (7) кратности больше единицы. Нахождение этого корня и является задачей при решении соотношения (7).

К выяснению данного вопроса можно подойти следующим образом. Представим второе слагаемое выражения (7) в виде

$$\left(\frac{f[T(+R)]}{100}\right)^4 = m^4\left(\frac{T(+R)}{100}\right)^4, \quad (8)$$

где положительное значение m равно

$$m = \frac{f[T(+R)]}{T(+R)} = \frac{T(-R)}{T(+R)}. \quad (9)$$

При такой подстановке соотношение (7) примет вид

$$\frac{\varepsilon_{n_1}}{\varepsilon_{n_2}}\left(\frac{T_{c_1}}{100}\right)^4 + \left(\frac{T_{c_2}}{100}\right)^4 = \left(\frac{T(+R)}{100}\right)^4\cdot\left(\frac{\varepsilon_{n_1}}{\varepsilon_{n_2}} + m^4\right). \quad (10)$$

Отсюда

$$T(+R) = T_{c_1} \sqrt[4]{\frac{\dfrac{\varepsilon_{n_1}}{\varepsilon_{n_2}} + h^4}{\dfrac{\varepsilon_{n_1}}{\varepsilon_{n_2}} + m^4}}, \tag{11}$$

где $h = \frac{T_{c_2}}{T_{c_1}} \leqslant 1$. Условно принимается $T_{c_1} \geqslant T_{c_2}$ (положительное направление оси X выбирается в сторону среды с большей температурой).

В случае $\varepsilon_{n_1} = \varepsilon_{n_2}$, имеем

$$T(+R) = T_{c_1} \sqrt[4]{\frac{1 + h^4}{1 + m^4}}. \tag{11'}$$

Границы коэффициента m могут быть установлены на основании исследования (9) и (11). Согласно (9), отношение m не должно превосходить единицы, а из (11) следует, что величина m должна быть равна или более комплекса h. Следовательно, имеем

$$h \leqslant m \leqslant 1. \tag{12}$$

Подстановка этих предельных значений m в решение (11) дает верхнюю и нижнюю границы для действительной величины температуры $T(+R)$, а именно

$$T_{c_1} \sqrt[4]{\frac{\dfrac{\varepsilon_{n_1}}{\varepsilon_{n_2}} + h^4}{\dfrac{\varepsilon_{n_1}}{\varepsilon_{n_2}} + 1}} \leqslant T(+R) \leqslant T_{c_1} \tag{12'}$$

Когда $\varepsilon_{n_1} = \varepsilon_{n_2}$, то

$$T_{c_1} \sqrt[4]{\frac{1 + h^4}{2}} \leqslant T(+R) \leqslant T_{c_1}. \tag{12''}$$

Этот интервал достаточно узок, благодаря чему и удается значительно сократить число итерационных операций.

Таким образом, исходя из предварительного объема знаний, значение отношения m уже в первом приближении может быть выбрано достаточно близким к истинному, если воспользоваться неравенством (12). Пусть вначале $m = m_1$. Тогда из (11) находится первое выражение температуры поверхности пластины $T_1(+R)$. После этого на основании (9) уточняется принятая величина m_1. Когда $m_1' = \frac{f[T_1(+R)]}{T_1(+R)}$ отличается существенно от m_1, то расчет продолжается далее по $m_2 = \frac{m_1 + M_1}{2}$, где $M_1 = m_1'$, если $m_1' > h$ и $M_1 = h$, в случае $m_1' \leqslant h$ т. е. установление пределов m для каждой последующей операции производится с учетом граничных значений m в предыдущей операции (см. таблицу 1). Описанный процесс повторяется до тех пор, пока значение m_n не станет равным m_n'. Температура $T_n(+R)$, определенная согласно (11), при $m = m_n$ и будет искомой величиной. Тогда

$$T(-R) = m_n \cdot T_n(+R).$$

Рассмотрим частный случай задачи (1), (2), (3), когда $\lambda = \mathrm{const}$. При этом условии выражения (4), (6), (7) и (9) примут вид:

$$T(x) = \frac{T(+R) - T(-R)}{2} \cdot \frac{x}{R} + \frac{T(+R) + T(-R)}{2}; \qquad (4')$$

$$\frac{\lambda}{2R}\left[T(+R) - T(-R)\right] = \varepsilon_{n_1} \cdot C_0 \left[\left(\frac{T_{c_1}}{100}\right)^4 - \left(\frac{T(+R)}{100}\right)^4\right]; \qquad (6')$$

$$\frac{\varepsilon_{n_1}}{\varepsilon_{n_2}}\left(\frac{T_{c_1}}{100}\right)^4 + \left(\frac{T_{c_2}}{100}\right)^4 = \frac{\varepsilon_{n_1}}{\varepsilon_{n_2}}\left(\frac{T(+R)}{100}\right)^4 +$$

$$+ \left\{\frac{T(+R) - \frac{2R}{\lambda}\varepsilon_{n_1} \cdot C_0\left[\left(\frac{T_{c_1}}{100}\right)^4 - \left(\frac{T(+R)}{100}\right)^4\right]}{100}\right\}^4; \qquad (7')$$

$$m = \frac{T(-R)}{T(+R)} = \sqrt[4]{\left\{1 - \frac{\frac{2R}{\lambda}\varepsilon_{n_1} \cdot C_0 \cdot \left[\left(\frac{T_{c_1}}{100}\right)^4 - \left(\frac{T(+R)}{100}\right)^4\right]}{T(+R)}\right\}^4}. \qquad (9')$$

Нетрудно заметить, что соотношение (7′) есть алгебраическое уравнение шестнадцатой степени, решение которого не представимо в радикалах. Из основной теоремы алгебры комплексных чисел следует [1], что данное уравнение должно иметь 16 корней. Как уже указывалось, существует несколько способов отыскания точного числа действительных корней. Среди них наиболее удобным является метод Штурма [1]. Однако в рассматриваемом случае этот вопрос может быть решен более просто, если воспользоваться соображениями, изложенными выше.

Из выражения (9′) можно определить четыре значения коэффициента m: одно положительное, одно отрицательное и два комплексных. Этим четырем значениям величины m, на основании соотношения (11), соответствует один положительный и один отрицательный корень кратности, равной четырем каждый. Другие восемь корней — комплексные.

С физической точки зрения наибольший интерес представляет действительное, положительное решение зависимости (7′), которое и может быть определено на основе (9′) и (11) методом постепенного приближения к истинному значению.

Таблица 1

№ операции	m	$T(+R)$ °K по (11)	m' согласно (9′)	$T(+R)$ °K истинное значение	δ%	Интервал значений m
0						$0{,}7 \leqslant m \leqslant 1$
1	0,85	1597,2	0,612		2,84	0,7÷0,85
2	0,775	1652,0	0,817	1644	0,49	0,775÷0,817
3	0,796	1637,3	0,761		0,41	0,775÷0,796
4	0,786	1644,4	0,788		0,02	0,786÷0,788

В табл. 1 приведен пример расчета ($T_{c_1} = 1700$°K; $T_{c_2} = 1190$°K; $h = 0{,}7$; $\frac{\varepsilon_{n_1}}{\varepsilon_{n_2}} = 0{,}753$; $\varepsilon_{n_2} = 0{,}5$; $2R = 0{,}8$ *м*; $\lambda = 51{,}15$ *вт/м*·°K).

Из этой таблицы видно, что уже на второй ступени итерации расхождение расчетной температуры и действительной не превосходит требований точности инженерного расчета.

На рис. 1 (сплошная линия) показано стационарное поле температур, полученное с учетом данных табл. 1. Здесь же (пунктирные линии) изображен процесс приближения нестационарного режима нагрева к своему пределу, рассчитанному численным методом [2], при точно таких же внешних условиях.

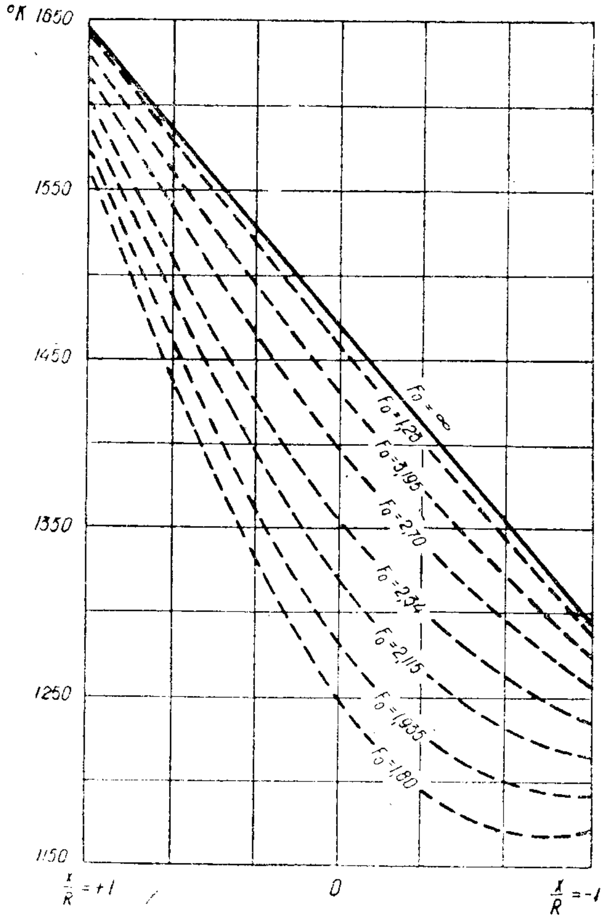

Рис. 1. Процесс приближения нестационарного поля температуры к установившемуся тепловому режиму.

Для случая, когда $2R \to 0$ (или $\lambda \to \infty$), расчетные соотношения (9′) и (11) преобразуются в выражения:

$$m = \frac{T(-R)}{T(+R)} = 1; \qquad (9'')$$

$$T(+R) = T(-R) = T_{c_1} \sqrt[4]{\frac{\frac{\varepsilon_{n_1}}{\varepsilon_{n_2}} + h^4}{\frac{\varepsilon_{n_1}}{\varepsilon_{n_2}} + 1}}, \qquad (11'')$$

справедливые для плоского тонкостенного экрана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. Физматгиз. 1962.
2. Ваничев. А. П. Труды НИИ—1. № 25, 1947.