ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 125 1964

ПРИМЕНЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ПОДСТАНОВОК ДЛЯ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

В. В. ИВАНОВ, В. В. САЛОМАТОВ

(Представлена проф. докт. техн. наук Г. И. Фуксом)

В теории теплообмена иногда приходится решать уравнение теплопроводности $\nabla^2\vartheta = 0$ со смешанными краевыми условиями 1 и 3 рода. В ряде случаев путем соответствующих аналитических приемов удается задачу со смешанными граничными условиями свести к более простой задаче с однородными граничными условиями 1 рода. Ниже приводятся несколько подстановок, которые позволяют избежать затруднений, связанных с граничными условиями, отражающими конвективный теплообмен на поверхности тела.

Пусть требуется решить уравнение

$$\frac{\partial^2\vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\vartheta}{\partial y^2} = 0$$

с краевыми условиями:

при $x = x_i$, $\alpha\vartheta = -\lambda \frac{\partial\vartheta}{\partial x}$ или $\vartheta + \frac{\lambda}{\alpha}\frac{\partial\vartheta}{\partial x} = 0$, на остальной части границы тела заданы постоянные температуры $\vartheta = \vartheta_i$.

Вводим подстановку

$$\varepsilon(x,y) = \vartheta(x,y) + \frac{\lambda}{\alpha}\frac{\partial\vartheta(x,y)}{\partial x}. \tag{1}$$

Тогда

$$\frac{\partial^2\vartheta}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\varepsilon}{\partial x^2} - \frac{\lambda}{\alpha}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2\vartheta}{\partial x^2}\right),$$

$$\frac{\partial^2\vartheta}{\partial y^2} = \frac{\partial^2\varepsilon}{\partial y^2} - \frac{\lambda}{\alpha}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2\vartheta}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial^2\varepsilon}{\partial y^2} + \frac{\lambda}{\alpha}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2\vartheta}{\partial x^2}\right).$$

Складывая эти равенства, получаем

$$\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varepsilon}{\partial y^2} = 0. \tag{2}$$

Краевые условия к уравнению (2) будут иметь вид

$$\varepsilon = 0 \text{ при } x = x_i,$$

$\varepsilon = \vartheta_i$ на остальной части границы тела.

Пусть решение уравнения (2) будет $\varepsilon = \psi(x,y)$.

Тогда искомое температурное поле для ϑ находится путем интегрирования дифференциального уравнения

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \frac{\alpha}{\lambda}\vartheta = \frac{\alpha}{\lambda}\psi.$$

Если желательно найти решение $\vartheta = f(\rho,\varphi)$ уравнения теплопроводности в цилиндрических координатах

$$\rho^2 \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial \vartheta}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \varphi^2} = 0$$

с краевыми условиями:

$$\text{при } \rho = R, \ \varphi_i < \varphi < \varphi_{\text{к}}, \ \alpha\vartheta = -\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial \rho},$$

а на остальной части границы тела заданы постоянные температуры $\vartheta = \vartheta_i$, то используется подстановка

$$\varepsilon(\rho,\varphi) = Bi\vartheta(\rho,\varphi) + \rho \frac{\partial \vartheta(\rho,\varphi)}{\partial \rho}, \quad \left(Bi = \frac{\alpha R}{\lambda}\right). \tag{3}$$

Так как

$$Bi \frac{\partial \vartheta}{\partial \rho} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} - \rho \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \rho^2} - \frac{\partial \vartheta}{\partial \rho}, \tag{4}$$

$$Bi \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \rho^2} = \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \rho^2} - 2\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \rho^2} - \rho \frac{\partial^3 \vartheta}{\vartheta \rho^3}, \tag{5}$$

$$Bi \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \varphi^2} = \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \varphi^2} - \rho \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \varphi^2}\right) = \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \varphi^2} + \rho \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho^2 \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial \vartheta}{\partial \rho}\right),$$

то, умножая (4) и (5) соответственно на ρ и ρ^2, получаем

$$\rho^2 \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \varphi^2} = 0. \tag{6}$$

Краевые условия к уравнению (6) примут вид

$$\varepsilon = 0 \text{ при } \rho = R, \ \varphi_i < \varphi < \varphi_{\text{к}},$$

Искомое температурное поле $\vartheta = f(\rho,\varphi)$ находится интегрированием уравнения

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \rho} + Bi \frac{\vartheta}{\rho} = \frac{\varepsilon}{\rho}.$$

Подстановки (1) и (3) позволяют решать некоторые стационарные задачи теплопроводности со смешанными граничными условиями (особенно в телах сложной конфигурации), используя эффективный метод конформных отображений. Известно [1], что с помощью конформных отображений можно решать лишь краевые задачи теплопроводности с граничными условиями 1 и 2 рода.

Пусть требуется решить уравнение Лапласа в сферических координатах

$$r^2 \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r^2} + 2r \frac{\partial \vartheta}{\partial r} + \operatorname{ctg}\Theta \frac{\partial \vartheta}{\partial \Theta} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \Theta^2} = 0$$

с граничными условиями: при $r = R$, $\Theta_i < \Theta < \Theta_к$, $\alpha\vartheta = -\lambda \frac{\partial\vartheta}{\partial r}$, на остальной части поверхности тела заданы постоянные температуры $\vartheta = \vartheta_i$.

Вводя подстановку

$$\varepsilon(r,\Theta) = \vartheta(r,\Theta) + \frac{r}{Bi}\frac{\partial\vartheta}{\partial r}, \tag{7}$$

получаем

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial r} = \frac{\partial\varepsilon}{\partial r} - \frac{1}{Bi} r \frac{\partial^2\vartheta}{\partial r^2} - \frac{1}{Bi}\frac{\partial\vartheta}{\partial r}, \tag{8}$$

$$\frac{\partial^2\vartheta}{\partial r^2} = \frac{\partial^2\varepsilon}{\partial r^2} - \frac{2}{Bi}\frac{\partial^2\vartheta}{\partial r^2} - \frac{1}{Bi} r \frac{\partial^3\vartheta}{\partial r^3}, \tag{9}$$

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial\Theta} = \frac{\partial\varepsilon}{\partial\Theta} - \frac{1}{Bi} r \frac{\partial^2\vartheta}{\partial r\,\partial\Theta}, \tag{10}$$

$$\frac{\partial^2\vartheta}{\partial\Theta^2} = \frac{\partial^2\varepsilon}{\partial\Theta^2} - \frac{1}{Bi} r \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial^2\vartheta}{\partial\Theta^2}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2\varepsilon}{\partial\Theta^2} + \frac{1}{Bi} r \left(r^2\frac{\partial^2\vartheta}{\partial r^2} - 2r\frac{\partial\vartheta}{\partial r} + \operatorname{ctg}\Theta\frac{\partial\vartheta}{\partial\Theta}\right).$$

Умножая уравнения (8), (9) и (10) соответственно на $2r$, r^2, $\operatorname{ctg}\Theta$, почленно суммируя, будем иметь

$$r^2\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial r^2} + 2r\frac{\partial\varepsilon}{\partial r} + \operatorname{ctg}\Theta\frac{\partial\varepsilon}{\partial\Theta} + \frac{\partial^2\varepsilon}{\partial\Theta^2} = 0. \tag{11}$$

Для уравнения (11) краевые условия будут иметь вид при

$$r = R, \quad \Theta_i < \Theta < \Theta_к, \quad \varepsilon = 0,$$

на остальной части $\varepsilon = \vartheta_i$.

Подставив в (7) найденное $\varepsilon = f(r,\Theta)$, получим уравнение, из которого легко находится искомое ϑ.

В качестве примера решим следующую задачу [2]. Шар радиуса R нагревается плоскопараллельным потоком тепла плотности q, падающим на его поверхность, и отдает тепло в окружающую среду в соответствии с законом Ньютона. Найти температурное поле в шаре.

Искомое распределение температуры должно удовлетворить уравнению Лапласа $\nabla^2 t(r,\Theta) = 0$ и граничным условиям

$$\left.\frac{\partial t}{\partial r} + \frac{\alpha}{\lambda} t\right|_{r=R} = \begin{cases} \frac{q}{\lambda}\cos\Theta, & 0 \leqslant \Theta \leqslant \pi/2 \\ 0, & \frac{\pi}{2} \leqslant \Theta \leqslant \pi. \end{cases}$$

Вводим подстановку (7). Тогда граничные условия примут вид при $r = R$, $0 \leqslant \Theta \leqslant \frac{\pi}{2}$, $\varepsilon = \frac{q}{\lambda}\cos\Theta$, $\frac{\pi}{2} \leqslant \Theta \leqslant \pi$, $\varepsilon = 0$.

Решение для ε строится в виде ряда

$$\varepsilon(r,\Theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\left(\frac{r}{R}\right)^n P_n(\cos\Theta),$$

где

$$a_n = \frac{2n+1}{2} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{q}{\lambda} \cos\Theta P_n(\cos\Theta)\, d(\cos\Theta).$$

На основании [3] имеем

$$a_o = \frac{q}{4\lambda}, \quad a_1 = \frac{q}{2\lambda}, \quad a_{2n+1} = 0,$$

$$a_{2n} = \frac{q}{\lambda} (-1)^n \frac{(2n-2)!\,(4n+1)}{2^{2n+1}(n-1)!\,(n+1)!}.$$

Поэтому

$$\varepsilon(r,\Theta) = \frac{q}{4\lambda} + \frac{q}{2\lambda} \cdot \frac{r}{R} \cos\Theta +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{2n} \frac{q}{\lambda} \frac{(2n-2)!\,(4n+1)}{2^{2n+1}(n-1)!\,(n+1)!} \cdot \left(\frac{r}{R}\right)^{2n} P_{2n}(\cos\Theta). \qquad (12)$$

Подставив (12) в (7) и решая полученное уравнение, будем иметь

$$t(r,\Theta) = \frac{q}{4\lambda} + \frac{1}{(Bi+1)} \cdot \frac{q}{2\lambda}\left(\frac{r}{R}\right)\cos\Theta +$$

$$+\frac{q}{\lambda}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{2n} \frac{(2n-2)!\,(4n+1)}{2^{2n+1}(n-1)!\,(n+1)!} \cdot \frac{1}{Bi+2n}\left(\frac{r}{R}\right)^{2n} P_{2n}(\cos\Theta),$$

что соответствует решению, приведенному в [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М. А. и Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. Гостехиздат, 1951.

2. Лебедев Н. Н., Скальская И. П., Уфлянд Я. С. Сборник задач по математической физике. Гостехиздат, 1955.

3. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. Основные дифференциальные уравнения математической физики. Физматиздат, 1962.