

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ИЗМЕНЕНИЙ КОТИРОВОК ФИНАНСОВЫХ ИНСТРУМЕНТОВ НА ОСНОВЕ МОДЕЛИ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ВОЛАТИЛЬНОСТИ

Е.В. Истигечева, А.А. Мицель

Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники
E-mail: ievne@mail.ru

Рассматривается модель стохастической волатильности. Параметры модели оцениваются методом последовательного анализа. Осуществляется моделирование котировок финансового инструмента на примере европейской валюты.

Введение

В настоящее время одним из самых актуальных направлений прикладной математики является построение математических моделей, адекватно описывающих эволюцию таких финансовых инструментов как акции, облигации, опционы, котировки валют и т. д. В связи с этим становится необходимым изучение свойств, вычисление параметров и определение вида распределения некоторого стохастического процесса, лежащего в основе рыночных флуктуаций.

Известно, что у эмпирической функции плотности распределения, построенной на основе исторических данных, существует ненулевой эксцесс и асимметрия. Кроме того, присутствует вытянутость функции плотности в ε -окрестности точки математического ожидания, а так же наблюдаются так называемые «толстые хвосты», когда вероятность значительных изменений ценовых приращений выше, чем для нормального распределения.

Для изучения распределений таких случайных процессов и прогнозирования будущего уровня их волатильности (изменчивости) было предложено большое количество моделей. Наиболее изученной является модель Блэка-Шоулса для опционов. Данная модель позволяет построить распределение приращений временного ряда, которое уже будет иметь более толстые хвосты по сравнению с нормальным распределением и, как следствие, дает возможность рассчитывать волатильность более точно. Тем не менее, хвосты остаются достаточно «тонкими» по сравнению с распределениями данных реальных финансовых рынков, что недопустимо.

В связи с вышесказанным в настоящее время получили развитие другие подходы. Наиболее интересными из них являются методы с использованием фрактального броуновского движения, когда временной ряд представляется в виде фрактала (и, как следствие, становится известен закон построения с регулируемыми величинами начальных и центральных моментов); алгоритмы подгонки функции распределения под распределение значений временного ряда, а так же процесс прогнозирования волатильности с помощью негауссовских моделей типа ARCH (модели с авторегрессионной условной неоднородностью) [1–4], позволяющих проводить анализ коррелированных и высокочастотных данных.

В данной работе рассматривается модель стохастической волатильности (*Stochastic Volatility – SV*) первого порядка SV(1). Для оценивания параметров этой модели в литературе предлагаются метод максимального правдоподобия и обобщенный метод моментов [см., например, 1]. В работе [5] приводится достаточно подробное описание и сравнение этих двух методов применительно к SV-моделям. В данной работе предлагается построить оценки неизвестных параметров методом последовательного анализа. Преимущество данного метода состоит в том, что оценки параметров можно получить с априорно заданной точностью.

Постановка задачи

Пусть

$$S_n = S_0 e^{H_n}$$

— значение цены акций или обменного курса валют в момент времени n , тогда

$$H_n = \ln \frac{S_n}{S_0}.$$

В классе рассматриваемых моделей величина нормированных цен H_n определяется как

$$H_n = y_1 + \dots + y_n,$$

где

$$y_n = \ln \left(\frac{S_n}{S_{n-1}} \right).$$

Модель стохастической волатильности определяется как [1]:

$$y_n = \sigma_n \varepsilon_n,$$

где y_n — последовательность наблюдений, ε_n — стандартная гауссовская последовательность, σ_n — стохастическая волатильность. Предполагается, что

$$\sigma_n^2 = \exp(h_n), \quad h_n = \alpha_0 + \alpha_1 h_{n-1} + v_n.$$

Здесь v_n — стандартная гауссовская последовательность, которая предполагается независимой от ε_n .

Тогда, процесс h_n будет стационарным при условии $|\alpha_1| < 1$, причём

$$E(h_n) = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1}, \quad D(h_n) = \frac{\sigma_v^2}{1 - \alpha_1^2}.$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} E(\varepsilon_n^4) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^4 e^{-x^2/2} dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} x^3 e^{-x^2/2} d(x^2/2) = \\ &= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} (x^2/2)^{3/2} e^{-x^2/2} d(x^2/2) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{3\sqrt{\pi}}{4} = 3, \\ E y_n^2 &= E \sigma_n^2 E \varepsilon_n^2 = E \sigma_n^2, \\ E y_n^4 &= E \sigma_n^4 E \varepsilon_n^4 = 3 E \sigma_n^4. \end{aligned}$$

Тогда коэффициент эксцесса имеет вид:

$$K = \frac{E y_n^4}{(E y_n^2)^2} - 3 = 3 \left(\frac{E \sigma_n^4 - (E \sigma_n^2)^2}{(E \sigma_n^2)^2} \right) = 3 \frac{D \sigma_n^2}{(E \sigma_n^2)^2} \geq 0.$$

Положительность величины K свидетельствует о том, что плотность распределения величин y_n в окрестности среднего значения вытянута вверх сильнее и имеет более тяжелые хвосты, чем соответствующее нормальное распределение.

Очевидно, что

$$\ln y_n^2 = h_n + \ln \varepsilon_n^2,$$

Известно, что [2]:

$$E(\log \varepsilon_n^2) = -1,27; \quad D(\log \varepsilon_n^2) = 4,93.$$

Общие положения

Рассмотрим возможность построения оценки методом последовательного анализа [6, 7]. Модель SV может быть приведена к системе линейных уравнений без потери информации:

$$z_n = x_n + \eta_n, \quad (1)$$

$$x_n = \alpha_0 + \alpha_1 x_{n-1} + v_n, \quad (2)$$

где

$$x_n = \log h_n, \quad z_n = \log y_n^2 - \beta, \quad \eta_n = \log \varepsilon_n^2 - \beta.$$

Если шумы v_n , ε_n являются гауссовскими, т. е. $v_n, \varepsilon_n \sim N(0,1)$, то $\beta = -1,27$.

Возвращаясь к (1), (2), имеем:

$$z_n = \alpha_0 + \alpha_1 z_{n-1} + \xi_n, \quad (3)$$

где

$$\xi_n = \eta_n - \alpha_1 \eta_{n-1} + v_n.$$

Это уравнение может быть переписано в виде:

$$z_n = Z_{n-1}^T \cdot \theta + \xi_n,$$

где

$$Z_n = (1, z_n)^T, \quad \theta = [\alpha_0, \alpha_1]^T.$$

Гарантированная оценка θ для строится на основе оценки Юла-Уокера, заданной следующими формулами:

$$\theta_N = G_N^{-1} \sum_{n=2}^N Z_{n-2} z_n,$$

$$G_N = \sum_{n=2}^N Z_{n-2} Z_{n-1}^T,$$

где G_N^{-1} — это обратная матрица к G_N (которая по предположению существует). Оценка Юла-Уокера используется здесь вместо оценки, полученной методом наименьших квадратов, так как она является асимптотически несмещенной в предположении, что шум $\eta_n \neq 0$ в наблюдениях (1). Процедура последовательного оценивания в данном случае проводится в два этапа.

Этап 1.

Выберем такую неубывающую последовательность c_k , что $c_k > 1$ и $\lim_{k \rightarrow \infty} c_k = +\infty$, при этом

$$\sum_{k \geq 1} \frac{1}{c_k} < \infty.$$

По мере наблюдения процесса $\{z_n\}$, последовательно находятся марковские моменты $\tau_k = \tau(c_k)$ по формуле [4]:

$$\tau(h) = \inf \{m \geq 2 : \sum_{n=2}^m \|Z_{n-2}\|^2 \geq h > 0\}.$$

Здесь $\|\cdot\|$ — евклидова норма для векторов и матриц, т. е. $\|B\|^2 = \text{tr } B \cdot B^T$. Для каждого $\tau_k, k \geq 1$ модифицированная оценка Юла-Уокера определяется как:

$$\tilde{\theta}(\tau(h)) = \tilde{G}_{\tau(h)}^{-1} \left[\sum_{n=2}^{\tau(h)-1} Z_{n-2} \cdot z_n + \mu(h) \cdot Z_{\tau(h)-2} \cdot z_{\tau(h)} \right], \quad (4)$$

$$\tilde{G}_{\tau(h)} = \left[\sum_{n=2}^{\tau(h)-1} Z_{n-2} \cdot Z_{n-1}^T + \mu(h) \cdot Z_{\tau(h)-2} \cdot Z_{\tau(h)-1}^T \right],$$

где $\mu(h)$ — корректирующий множитель, единственным образом определяющийся уравнением:

$$\sum_{n=2}^{\tau(h)-1} \|Z_{n-2}\|^2 + \mu(h) \cdot \|Z_{\tau(h)-2}\|^2 = h.$$

Этап 2.

Для того чтобы закончить процедуру, введем параметр $H > 0$, характеризующий точность оценивания, и определяющий последовательный план $(N(H), \theta^*(H))$, который состоит из длительности $N(H)$ и оценки $\theta^*(H)$:

$$N(H) = \tau(c_\sigma) + 1,$$

$$\theta^*(H) = \left(\sum_{j=1}^{\sigma} b_j \right)^{-1} \cdot \sum_{j=1}^{\sigma} b_j \tilde{\theta}_j.$$

Здесь σ — количество оценок типа (4), вошедших во взвешенное среднее:

$$\sigma = \sigma(H) = \inf \left\{ k \geq 1 : \sum_{j=1}^k b_j \geq H \right\},$$

где $b_j = b(c_j)$ определяется следующим образом:

$$b(h) = \begin{cases} h^{-2} \|\tilde{G}_{\tau(h)}^{-1}\|^2, & \det \tilde{G}_{\tau(h)}^{-1} > 0, \\ 0, & \det \tilde{G}_{\tau(h)}^{-1} = 0. \end{cases}$$

В работе [6] было показано, что для любого $H > 0$ последовательный план $(N(H), \theta^*(H))$ обладает следующими свойствами:



Рисунок. Сравнение исторических и модельных значений котировок курса евро (дневные цены закрытия) за период с 1 июня 2004 г. по 21 апреля 2006 г.

1. $N(H) < \infty$ с вероятностью почти наверное;
2. $\sup E \|\theta^*(H) - \theta\|^2 \leq \frac{\rho}{H}$, $\rho = 2(\sigma_v^2 + 2\sigma_\eta^2) \sum_{k \geq 1} \frac{1}{c_k}$.

Анализ эмпирических данных

Применим метод стохастической волатильности для моделирования временного ряда y_n котировок европейской валюты, рисунок.

Отметим, что $y_n = \ln(S_n) - \ln(S_{n-1})$, $n=1, 2, 3, \dots$, обладают следующими параметрами: среднее — $1,411 \cdot 10^{-4}$, дисперсия — $4,32 \cdot 10^{-5}$, коэффициент асимметрии — 0,092, куртозис (экспесс) — 1,747.

Параметры модели для данного временного ряда: $\alpha_0 = 0,000561$ и $\alpha_1 = 0,998712$; похожие результаты для котировок японской йены были получены в работе [1].

После моделирования прогнозных данных с использованием модели стохастической волатильности была рассчитана относительная погрешность δ_n между исходными данными и полученным прогнозом:

$$\delta_n = \left| S_n^{SV} - S_n \right| S_n^{-1}.$$

величина δ_n не превосходила 2,5 %.

Анализ рисунка дает основание сделать вывод о том, что модель стохастической волатильности удовлетворительно описывает исходные данные и позволяет моделировать их значения с небольшой погрешностью.

Выводы

Получены оценки параметров в модели стохастической волатильности методом последовательного анализа на основе оценки Юла-Уокера. Важными свойствами этой оценки является то, что она строится с априорно заданной среднеквадратической точностью и процедура построения оценки сходится при любых начальных значениях параметров модели. Кроме того, SV-модель использована для имитационного моделирования котировок курса евро. Показана высокая эффективность модели стохастической волатильности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шепард Н. Статистические аспекты моделей типа ARCH и стохастическая волатильность // Обзорение прикладной и промышленной математики. — 1996. — Т. 3. — Вып. 6. — С. 764–826.
2. Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. — Т. 1. — Факты. Т. 2. — Модели. — М.: Фазис, 1998. — 512 с.
3. Engle R.F. Bayesian Analysis of Stochastic Volatility Models // Journal of Business and Economic Statistics. — 1994. — V. 12. — № 4. — P. 395–397.
4. Ширяев А.Н. Вероятностно-статистические модели эволюции финансовых индексов // Обзорение прикладной и промышленной математики. — 1995. — Т. 2. — Вып. 4. — С. 527–555.
5. Jacquier E., Polson N.G., Rossi P.E. Bayesian analysis of stochastic volatility models (with discussion) // Journal of Business and Economic Statistics. — 1994. — V. 12. — № 4. — P. 371–417.
6. Konev V.V. Guaranteed estimation of parameters in stochastic volatility models // 26th International congress of actuaries: Proceeding. — 1998. — V. 7. — P. 121–135.
7. Истигичева Е.В. Гарантированное оценивание параметров стохастической волатильности // Научная сессия ТУСУР — 2006: Матер. докладов Всеросс. научно-техн. конф. студентов, аспирантов и молодых ученых. — Томск, 2006. — Т. 5. — С. 219–221.