ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 131 1965

ПРИМЕНЕНИЕ ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ К ВЫЧИСЛЕНИЮ НЕКОТОРЫХ ВИДОВ ИНТЕГРАЛОВ

В. Е. КОРНИЛОВ

(Представлена научным семинаром кафедр высшей математики и инженерно-вычислительной математики ТПИ)

В статье применяются параметры $a>0,\ b\geqslant 0,\ 0\leqslant\gamma<1;\ x>0,$ $c=a+bi,\quad \varphi=\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a},$

где

$$a=|c|\cos\varphi,\quad b=|c|\sin\varphi,\quad 0\leqslant\varphi<\frac{\pi}{2}\cdot \tag{1}$$

Вводится обозначение

$$(\lambda)_k=\lambda(\lambda+1)\ldots(\lambda+k-1)=\frac{\Gamma(\lambda+k)}{\Gamma(\lambda)},\qquad (\lambda)_0=1.$$

Рассмотрим применение цепных дробей для приближенного вычисления интегралов вида $I=\int\limits_x^\infty t^{\gamma-1}e^{-ct}\,dt.$

После n-кратного интегрирования по частям получим

$$I=\int\limits_x^\infty t^{\gamma-1}e^{-ct}\,dt=x^\gamma e^{-cx}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\frac{(1-\gamma)_k}{(cx)^{k+1}}+$$

$$+(-1)^{n-1}\frac{(1-\gamma)_n}{c^n}\int\limits_x^\infty t^{\gamma-n-1}e^{-ct}\,dt,$$

откуда при $n\to\infty$ получается ряд для I

$$I=\int\limits_x^\infty t^{\gamma-1}e^{-ct}\,dt=x^\gamma e^{-cx}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(1-\gamma)_k}{(cx)^{k+1}}=$$

$$=\frac{x^\gamma e^{-cx}}{cx}F\left(1-\gamma,\ -\frac{1}{cx}\right),\quad |cx|\gg 1,$$

к тому же нетрудно проверить, что

$$F\left(1-\gamma,\ -\frac{1}{cx}\right)=1-\frac{1-\gamma}{(cx)}+\frac{(1-\gamma)_2}{(cx)^2}F\left(3-\gamma,\ -\frac{1}{cx}\right)\cdot$$

По отношению к ряду $\frac{1}{cx}F\left(3-\gamma,\ -\frac{1}{cx}\right)$ соответствующая цепная дробь ([1], стр. 229) следующая ([1], стр. 301, 269):

$$I = \int\limits_x^\infty t^{\gamma-1} e^{-ct}\, dt = x^\gamma e^{-cx} \frac{1}{cx} \left\{ 1 - \frac{1-\gamma}{cx} + \right.$$

$$\left. + \frac{(1-\gamma)_2}{cx} \left[\frac{P_{2k}(cx)}{Q_{2k}(cx)} + R_{2k}(cx) \right] \right\} = \frac{x^\gamma e^{-cx}}{(cx)^2} \cdot \frac{p_{2k}(cx)}{Q_{2k}(cx)} + r_{2k}(cx),$$

где

$$\frac{P_n(cx)}{Q_n(cx)} = \frac{1}{\alpha_1} + \ldots + \frac{1}{\alpha_n},$$

$$R_{2k}(cx) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{\alpha_{2n+2}}{Q_{2n}(cx)\, Q_{2n+2}(cx)} \text{ ([2], стр. 34)},$$

$$\alpha_1 = cx, \quad \alpha_{2k} = \frac{(k-1)!}{(3-\gamma)_k}, \quad \alpha_{2k+1} = \frac{(3-\gamma)_k}{k!} cx; \; k = 1, 2, \ldots \tag{2}$$

Для знаменателей подходящих дробей с четными индексами известно рекуррентное соотношение ([2], стр. 14)

$$Q_{2k+2}(cx) = \left(\alpha_{2k+2}\,\alpha_{2k+1} + \frac{\alpha_{2k+2}}{\alpha_{2k}} + 1\right) Q_{2k}(cx) - \frac{\alpha_{2k+2}}{\alpha_{2k}} Q_{2k-2}(cx). \tag{3}$$

Далее предполагается, что

$$Q_{2k}(cx) = \sum_{n=0}^{k} C_k^n \frac{(cx)^n}{(3-\gamma)_n}, \quad k=1, 2, \ldots \tag{4}$$

После непосредственного вычисления цепной дроби (2) убеждаемся, что равенство (4) справедливо при $k=1, 2$. На основании метода математической индукции нетрудно установить, что если многочлены (4) будут удовлетворять соотношению (3), тогда они будут справедливы и для $k=3, 4, \ldots$

На основании (2)—(4) получается

$$Q_{2k+2}(cx) = \left(\frac{cx}{3-\gamma+k} + \frac{k}{3-\gamma+k} + 1\right) \sum_{n=0}^{k} C_k^n \frac{(cx)^n}{(3-\gamma)_n} -$$

$$- \frac{k}{3-\gamma+k} \sum_{n=0}^{k-1} C_{k-1}^n \frac{(cx)^n}{(3-\gamma)_n} =$$

$$= 1 + \frac{k}{3-\gamma+k} \cdot \frac{(cx)^k}{(3-\gamma)_{k-1}} + \frac{(cx)^{k+1}}{(3-\gamma)_{k+1}} + \frac{(cx)^k}{(3-\gamma)_k} +$$

$$+ k \frac{(cx)^k}{(3-\gamma)_{k+1}} + \sum_{n=1}^{k} \frac{(cx)^n}{(3-\gamma)_{n-1}} \left[\frac{1}{3-\gamma+k} C_k^{n-1} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2-\gamma+n} C_k^n + \frac{k}{(2-\gamma+n)(3-\gamma+k)} C_{k-1}^{n-1} \right] =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{k-1} C_{k+1}^n \frac{(cx)^n}{(3-\gamma)_n} + (k+1) \frac{(cx)^k}{(3-\gamma)_k} +$$

$$+ \frac{(cx)^{k+1}}{(3-\gamma)_{k+1}} = \sum_{n=0}^{k+1} C_{k+1}^n \frac{(cx)^n}{(3-\gamma)_n},$$

тем самым равенство (4) доказано.

К тому же ввиду (2) числитель $P_{2k}(cx)$ будет следующий:

$$P_{2k}(cx) = \sum_{n=1}^{k} C_k^n \frac{(cx)^n}{(3-\gamma)_n} \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m \frac{(3-\gamma)_m}{(cx)^{m+1}} . \tag{5}$$

Далее, после применения равенств (2), (4), (5), вычисляется и преобразуется числитель $p_{2k}(cx)$:

$$p_{2k}(cx) = (1-\gamma)_2 P_{2k}(cx) + (cx - 1 + \gamma) Q_{2k}(cx) =$$

$$= (1-\gamma)_2 \sum_{n=0}^{k} C_k^n \sum_{m=0}^{n+1} \frac{(-1)^m (cx)^{n+1-m}}{(1-\gamma+m)_{n+2-m}} =$$

$$= (1-\gamma)_2 \left\{ C_k^0 \left[\frac{cx}{(1-\gamma)_2} - \frac{1}{2-\gamma} \right] + \right.$$

$$+ C_k^1 \left[\frac{(cx)^2}{(1-\gamma)_3} - \frac{cx}{(2-\gamma)_2} + \frac{1}{3-\gamma} \right] + \ldots$$

$$\left. \ldots + C_\kappa^\kappa \left[\frac{(cx)^{\kappa+1}}{(1-\gamma)_{\kappa+2}} - \ldots + (-1)^{\kappa+1} \frac{1}{2-\gamma+k} \right] \right\},$$

$$p_{2k}(cx) = (1-\gamma)_2 \sum_{n=0}^{\kappa+1} (cx)^n \sum_{m=0}^{\kappa+1-n} \frac{C_\kappa^m (-1)^{\kappa+1-n-m}}{(2-\gamma+k-n-m)_{n+1}} . \tag{6}$$

Учитывая равенства (2), (4), (6), получаем

$$I = \int_x^\infty t^{\gamma-1} e^{-ct}\, dt =$$

$$= \frac{\dfrac{(1-\gamma)_2 x^\gamma}{e^{cx}} \displaystyle\sum_{n=1}^{\kappa+1} (cx)^n \sum_{m=0}^{\kappa+1-n} \frac{C_\kappa^m (-1)^{\kappa+1-n-m}}{(2-\gamma+k-n-m)_{n+1}}}{\displaystyle\sum_{n=0}^{\kappa} C_\kappa^n \frac{(cx)^{n+2}}{(3-\gamma)_n}} +$$

$$+ r_{2k}(cx), \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{7}$$

Далее согласно (2) и (4) и ввиду $|Q_{2k}(cx)| < |Q_{2\kappa+2}(cx)|$ ([2], стр. 14) вычисляется остаточный член $R_{2k}(cx)$ по модулю

$$|R_{2k}(cx)| \leqslant \sum_{n=k}^{\infty} \left| \frac{n!}{(3-\gamma)_{n+1} Q_{2n}(cx) Q_{2n+2}(cx)} \right| <$$

$$< \frac{k!}{(3-\gamma)_{\kappa-1} |Q_{2k}(cx)|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(k+1)_n}{(2-\gamma+k)_{n+2}} <$$

$$< \frac{k!}{(3-\gamma)_{\kappa-1} |Q_{2k}(cx)|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2-\gamma+k+n)_2} = \frac{k!}{(3-\gamma)_k |Q_{2k}(cx)|^2}$$

или ввиду (2)

$$|r_{2k}(cx)| < \frac{(1-\gamma)_2 k! |x^\gamma e^{-cx}|}{cx|^2 (3-\gamma)_k Q_{2k}(cx)|^2} . \tag{8}$$

Аналогичная оценка остаточного члена была получена Марковым А. А. (3) только в случае вещественного переменного $ax = z > 0$ ($b = 0$, $c = a$).

После отделения вещественной и мнимой частей интеграла (7) получаются формулы для вычисления нижеследующих интегралов:

$$\int\limits_{x}^{\infty} t^{\gamma-1} e^{-at} \cos bt\, dt = \frac{AC + BD}{A^2 + B^2} + Re\,[r_{2k}(cx)], \tag{9}$$

а также

$$\int\limits_{x}^{\infty} t^{\gamma-1} e^{-at} \sin bt\, dt = \frac{BC - AD}{A^2 + B^2} - Im\,[r_{2k}(cx)], \tag{10}$$

где

$$A = \sum_{n=0}^{\kappa} C_\kappa^n \frac{|c|^{n+2} x^{n+2}}{(3-\gamma)_n} \cos(n+2)\varphi, \tag{11}$$

$$B = \sum_{n=0}^{\kappa} C_\kappa^n \frac{|c|^{n+2} x^{n+2}}{(3-\gamma)_n} \sin(n+2)\varphi, \tag{12}$$

$$C = \frac{(1-\gamma)_2 x^\gamma}{e^{ax}} \sum_{n=0}^{\kappa+1} \frac{\cos(n\varphi - bx)}{|c|^{-n} x^{-n}} \sum_{m=0}^{\kappa+1-n} \frac{C_\kappa^m (-1)^{\kappa+1-n-m}}{(2-\gamma+k-n-m)_{n+1}}, \tag{13}$$

$$D = \frac{(1-\gamma)_2 x^\gamma}{e^{ax}} \sum_{n=0}^{\kappa+1} \frac{\sin(n\varphi - bx)}{|c|^{-n} x^{-n}} \sum_{m=0}^{\kappa+1-n} \frac{C_\kappa^m (-1)^{\kappa+1-n-m}}{(2-\gamma+k-n-m)_{n+1}}. \tag{14}$$

Остаточные члены формул (9) и (10) могут быть оценены на основании формулы (8), так как

$$|Re\,[r_{2k}(cx)]| \leqslant |r_{2k}(cx)|$$

и

$$|Im\,[r_{2k}(cx)]| \leqslant |r_{2k}(cx)|.$$

Путем последовательного применения рекуррентных формул ([4], стр. 211) к интегралам (9) преобразуются следующие интегралы:

$$I_1 = \int x^{\gamma+n-1} e^{-ax} \cos(bx - n\varphi)\, dx =$$
$$= -e^{-ax} \sum_{\kappa=0}^{n-1} \frac{(\gamma+n-k)_k}{|c|^{\kappa+1}} x^{\gamma+n-1-\kappa} \cos[(k+1-n)\varphi + bx) +$$
$$+ \frac{(\gamma]_n}{|c|^n} \int x^{\gamma-1} e^{-ax} \cos bx\, dx, \tag{15}$$

$$\int x^{\gamma-n-1} e^{-ax} \cos(bx + n\varphi)\, dx =$$
$$= -e^{-ax} \sum_{\kappa=0}^{n-1} \frac{(-1)^k |c|^k}{(-\gamma+n-k)_{\kappa+1}} x^{\gamma-n+\kappa} \cos[(n-k)\varphi + bx] +$$
$$+ (-1)^n \frac{|c|^n}{(1-\gamma)_n} \int x^{\gamma-1} e^{-ax} \cos bx\, dx. \tag{16}$$

Для доказательства соотношения (15) от его правой части берется производная

$$\frac{dI_1}{dx} = e^{-ax} \sum_{\kappa=0}^{n-1} \frac{(\gamma+n-k)_k}{|c|^{\kappa+1}} x^{\gamma+n-1-\kappa} \{a \cos[(k+1-n)\varphi + bx] +$$
$$+ b \sin[(k+1-n)\varphi + bx]\} -$$

$$-e^{-ax}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\gamma+n-1-k)_{k+1}}{|c|^{k+1}}x^{\gamma+n-k-2}\cos\left[(k+1-n)\varphi+bx\right]+$$

$$+\frac{(\gamma)_n}{|c|^n}x^{\gamma-1}e^{-ax}\cos bx.$$

На основании (1) выражение в фигурных скобках равно $|c|\cos[(k-n)\varphi+bx]$, далее последние два слагаемых сокращаются и затем выделяется первое слагаемое первой суммы и вводится индекс $m=k-1$

$$\frac{dI_1}{dx}=x^{\gamma+n-1}e^{-ax}\cos(bx-n\varphi)+$$

$$+e^{-ax}\sum_{m=0}^{n-2}\frac{(\gamma+n-1-m)_{m+1}}{|c|^{m+1}}x^{\gamma+n-2-m}\cos\left[(m+1-n)\varphi+bx\right]-$$

$$-e^{-ax}\sum_{k=0}^{n-2}\frac{(\gamma+n-1-k)_{k+1}}{|c|^{k+1}}x^{\gamma+n-2-k}\cos\left[(k+1-n)\varphi+bx\right]=$$

$$=x^{\gamma+n-1}e^{-ax}\cos(bx-n\varphi).$$

Формула (15) доказана.

Аналогично доказывается соотношение (16).

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Л. Данилов, А. Н. Иванова и др. Математический анализ (функции, пределы, ряды, цепные дроби). М., Физматгиз, 1961.

2. Т. И. Стилтьес. Исследования о непрерывных дробях. М., ОНТИ, 1936.

3. А. А. Марков. Избранные труды по теории непрерывных дробей и теории функций наименее уклоняющихся от нуля. М.—Л., Гостехиздат, 1948.

4. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.